Determinant

11. decembra 2023

Plocha a objem

- Pre maticu 2×2 nad $\mathbb{R}$ je determinant (až na znamienko) rovný ploche rovnobežníka určeného riadkami matice t.j. vektormi (a_{11}, a_{12}), (a_{21}, a_{22}).
- Pre maticu 3×3 dostaneme (až na znamienko) objem rovnobežnostena určeného tromi riadkami, t.j. vektormi (a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}) a (a_{31}, a_{32}, a_{33}).
- Pre maticu $n \times n$ dostaneme n-rozmerný objem.

Plocha rovnobežníka

$$(a_{11}, a_{12}, 0) \times (a_{21}, a_{22}, 0) = (0, 0, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$
$$S = |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|$$

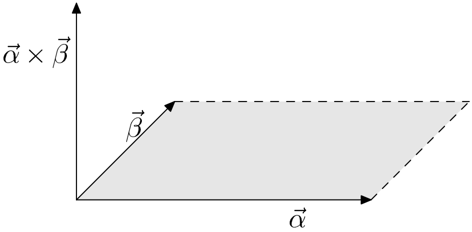

Figure: Vektorový súčin

Objem rovnobežnostena

$$|\vec{\alpha} \times \vec{\beta}||\vec{\gamma}| \cos \alpha = (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$$

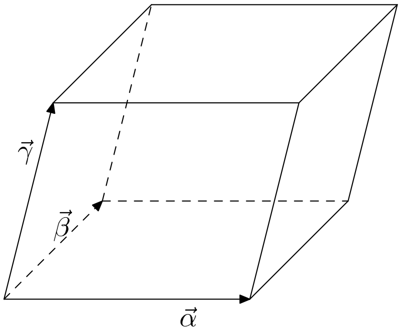

Figure: Rovnobežnosten určený 3 vektormi v $\mathbb{R}^3$

Objem rovnobežnostena

$$V = \pm(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$$
$$\vec{\alpha} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$$
$$\vec{\beta} = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$$
$$\vec{\gamma} = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$$

$$a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Definícia determinantu

Definícia

V tejto kapitole budeme označovať ako S_n množinu všetkých permutácií množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.
Dvojica $(\varphi(k), \varphi(s))$ sa volá *inverzia* permutácie φ, ak $k < s$ ale $\varphi(k) > \varphi(s)$. Počet inverzií permutácie φ budeme označovať $i(\varphi)$.

Príklad

Permutácia $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{smallmatrix}\right)$ má 4 inverzie (4,1), (4,3), (4,2), (3,2):

$$
\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
4 & 1 & & \\
4 & & 3 & \\
4 & & & 2\\
 & & 3 & 2
\end{array}
$$

Definícia determinantu

Definícia

Nech A je matica typu $n \times n$ nad poľom F, $A = ||a_{ij}||$.
Determinant matice A je

$$|A| = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{n\varphi(n)}. \tag{1}$$

S_n=množina všetkých permutácií $\{1, 2, \ldots, n\}$

Determinant matice 2×2

$$|A| = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{n\varphi(n)}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinant matice 3×3

φ	$i(\varphi)$	inverzie
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{smallmatrix}\right)$	0	
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	1	$(3,2)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	1	$(2,1)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	2	$(2,1)\ (3,1)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	2	$(3,1)\ (3,2)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	3	$(3,2)\ (3,1)\ (2,1)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

Determinant matice 3×3

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} & & \\
& \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & & & & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} & & \\
& & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} & & \\
& & & & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & \\
& & & & & & + & & + & & +
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
& & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\
& & & & & \diagup & & \diagup & & \diagup & \\
& & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\
& & & \diagup & & \diagup & & \diagup & & & \\
& & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \\
& \diagup & & \diagup & & \diagup & & & & & \\
- & & - & & - & & & & & &
\end{array}$$

Definícia determinantu

- V definícii vystupuje $n!$ sčítancov.
- Všetky sú súčiny také, že z každého riadku a z každého stĺpca sme vybrali práve jeden prvok.
- Každý takýto súčin je vynásobený znamienkom, ktoré závisí od počtu inverzií.

Determinant transponovanej matice

Veta

Nech A je matica typu $n \times n$. Potom

$$|A| = |A^T|.$$

Determinant transponovanej matice

$$|A| = |A^T|$$

$$|A| = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{n\varphi(n)}$$

$$= \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{\varphi^{-1}(1)1} a_{\varphi^{-1}(2)2} \cdots a_{\varphi^{-1}(n)n}$$

$$|A| = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a'_{1\varphi^{-1}(1)} a'_{2\varphi^{-1}(2)} \cdots a'_{n\varphi^{-1}(n)}$$

$$|A| = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi^{-1})} a'_{1\varphi(1)} a'_{2\varphi(2)} \cdots a'_{n\varphi(n)}$$

$$i(\varphi) = i(\varphi^{-1})$$

Algebraický doplnok

$$|A| = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \dots a_{n\varphi(n)}$$

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

Výraz A_{ij} nazývame *algebraický doplnok prvku* a_{ij}.

Algebraický doplnok

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\begin{aligned}
A_{11} &= a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\\
A_{12} &= a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}\\
A_{13} &= a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\\
A_{21} &= a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}\\
A_{22} &= a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}\\
A_{23} &= a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}\\
A_{31} &= a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}\\
A_{32} &= a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}\\
A_{33} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}$$

Algebraický doplnok

Veta

Pre algebraický doplnok prvku a_{rs} štvorcovej matice A platí

$$A_{rs} = (-1)^{r+s}|M_{rs}|.$$

- Dokážeme pre prípad $r = s = n$.
- Pri výmene susedných riadkov či stĺpcov sa zmení znamienko.
- Potrebujeme $(n - r - 1) + (n - s - 1) = 2(n - 1) - (r + s)$ výmen, aby sme previedli náš prípad na situáciu $r = s = n$.

Algebraický doplnok pre $r = s = n$

Iba tie sčítance, kde $\varphi(n) = n$:

$$|A| = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{n\varphi(n)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n-1) & n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n-1) \end{pmatrix}$$

$$A_{nn} = \sum_{\varphi \in S_{n-1}} (-1)^{i(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{n-1,\varphi(n-1)} = |M_{nn}|$$

Výmena susedných riadkov

$$A_{rs} = \sum_{\varphi \in S_n^{rs}} (-1)^{i(\varphi)} a_{1,\varphi(1)} \dots a_{r-1,\varphi(r-1)} a_{r+1,\varphi(r+1)} \dots a_{n,\varphi(n)}$$

$$B_{r+1,s} = \sum_{\varphi \in S_n^{r+1,s}} (-1)^{i(\varphi)} b_{1,\varphi(1)} \dots b_{r-1,\varphi(r-1)} b_{r,\varphi(r)} b_{r+2,\varphi(r+2)} \dots b_{n,\varphi(n)}$$

$$B_{r+1,s} = \sum_{\varphi \in S_n^{r+1,s}} (-1)^{i(\varphi)} a_{1,\varphi(1)} \dots a_{r-1,\varphi(r-1)} a_{r+1,\varphi(r)} a_{r+2,\varphi(r+2)} \dots a_{n,\varphi(n)}$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ \varphi(1) & \dots & s & \varphi(r+1) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix} \mapsto \varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ \varphi(1) & \dots & \varphi(r+1) & s & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

$$i(\varphi') = -i(\varphi)$$

Výmena susedných riadkov

$$A_{rs} = \sum_{\varphi \in S_n^{rs}} (-1)^{i(\varphi)} a_{1,\varphi(1)} \dots a_{r-1,\varphi(r-1)} a_{r+1,\varphi(r+1)} \dots a_{n,\varphi(n)}$$

$$B_{r+1,s} = \sum_{\varphi \in S_n^{r+1,s}} (-1)^{i(\varphi)} b_{1,\varphi(1)} \dots b_{r-1,\varphi(r-1)} b_{r,\varphi(r)} b_{r+2,\varphi(r+2)} \dots b_{n,\varphi(n)}$$

$$B_{r+1,s} = \sum_{\varphi \in S_n^{r+1,s}} (-1)^{i(\varphi)} a_{1,\varphi(1)} \dots a_{r-1,\varphi(r-1)} a_{r+1,\varphi(r)} a_{r+2,\varphi(r+2)} \dots a_{n,\varphi(n)}$$

$$B_{r+1,s} = \sum_{\varphi \in S_n^{r,s}} (-1)^{i(\varphi')} a_{1,\varphi(1)} \dots a_{r-1,\varphi(r-1)} a_{r+1,\varphi(r+1)} a_{r+2,\varphi(r+2)} \dots a_{n,\varphi(n)}$$

$$B_{r+1,s} = -\sum_{\varphi \in S_n^{r,s}} (-1)^{i(\varphi)} a_{1,\varphi(1)} \dots a_{r-1,\varphi(r-1)} a_{r+1,\varphi(r+1)} a_{r+2,\varphi(r+2)} \dots a_{n,\varphi(n)}$$

$$B_{r+1,s} = -A_{rs}$$

Výmena susedných riadkov

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ \varphi(1) & \dots & s & \varphi(r+1) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

$$\varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ \varphi(1) & \dots & \varphi(r+1) & s & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

$$i(\varphi') = -i(\varphi)$$

Laplaceov rozvoj

Dôsledok (Laplaceov rozvoj determinantu)

Nech A je matica typu $n \times n$. Potom

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1}|M_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2}|M_{i2}| + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in}|M_{in}|$$
$$|A| = (-1)^{j+1} a_{1j}|M_{1j}| + (-1)^{j+2} a_{2j}|M_{2j}| + \ldots + (-1)^{j+n} a_{nj}|M_{nj}|$$

Prvú rovnosť uvedenú v predchádzajúcom dôsledku nazývame *Laplaceov rozvoj determinantu matice A podľa i-teho riadku*, druhú *Laplaceov rozvoj podľa j-teho stĺpca.*

Znamienka v Laplaceovom rozvoji

$$(-1)^{i+j}$$

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{matrix}$$

Laplaceov rozvoj

Príklad

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$(-2) \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 1$$

ERO a determinant

Veta

Ak maticu B získame z A vynásobením k-teho riadku skalárom $c \in F$, tak

$$|B| = c|A|.$$

Dôsledok

Ak matica A má nulový riadok, tak $|A| = 0$.

Dôsledok

Pre maticu $A \in M_{n,n}(F)$ a $c \in F$ platí

$$|cA| = c^n|A|.$$

Rovnaké riadky

Veta

Ak má matica A dva rovnaké riadky, tak $|A| = 0$.

Dôkaz: Matematická indukcia + Laplaceov rozvoj

Rovnaké riadky

Veta

Ak má matica A dva rovnaké riadky, tak $|A| = 0$.

1° Pre $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0.$$

2°: Rozvoj podľa iného riadku – všetky členy rozvoja budú nulové.

Súčet riadkov (multilineárnosť)

Veta

Nech matice A a B sú matice typu $n \times n$, ktoré sa líšia len v k-tom riadku. Potom $|A| + |B| = |C|$, kde $c_{ij} = a_{ij} = b_{ij}$ pre $i \neq k$ a $c_{kj} = a_{kj} + b_{kj}$.

$$
\begin{aligned}
D(\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_{k-1}, c\vec{\alpha}_k, \vec{\alpha}_{k+1}, \dots, \vec{\alpha}_n) &= cD(\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_{k-1}, \vec{\alpha}_k, \vec{\alpha}_{k+1}, \dots, \vec{\alpha}_n) \\
D(\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_{k-1}, \vec{\alpha}_k + \vec{\beta}_k, \vec{\alpha}_{k+1}, \dots, \vec{\alpha}_n) &= D(\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_{k-1}, \vec{\alpha}_k, \vec{\alpha}_{k+1}, \dots, \vec{\alpha}_n) \\
&\quad + D(\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_{k-1}, \vec{\beta}_k, \vec{\alpha}_{k+1}, \dots, \vec{\alpha}_n)
\end{aligned}
$$

Pripočítanie násobku

Veta

Ak matica B vznikne z A pripočítaním c-násobku niektorého riadku k inému (pričom $c \in F$), tak $|B| = |A|$.

$$\begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_i + c\vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_i \\ \vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ c\vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_i \\ \vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_n \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_n \end{vmatrix} = |A| + c \cdot 0 = |A|$$

Výmena riadkov

Veta

Ak matica B vznikne z A vzájomnou výmenou dvoch riadkov, tak $|B| = -|A|$. (Výmena 2 riadkov matice mení znamienko determinantu.)

Výmena riadkov

$$\begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_i + \vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_i + \vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_i + \vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_i \\ \vec{\alpha}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_i + \vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_i \\ \vec{\alpha}_i \\ \vec{\alpha}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_i \\ \vec{\alpha}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_i \\ \vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_i \\ \vec{\alpha}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_i \\ \vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_i \\ \vec{\alpha}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_i \\ \vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_i + \vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_i + \vec{\alpha}_j \\ \vec{\alpha}_n \end{vmatrix} = 0$$

Horná trojuholníková matica

Veta

Ak A je horná trojuholníková matica (pod hlavnou diagonálou má nuly), tak determinant matice A sa rovná súčinu prvkov na diagonále.

$$|A| = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Dôsledok

Determinant diagonálnej matice sa rovná súčinu diagonálnych prvkov.

$$\begin{vmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \dots d_n$$

Horná trojuholníková matica

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \dots d_n$$

Výpočet determinantu pomocou ERO a ESO

Príklad

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$- \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(5)}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(6)}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(7)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(8)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(9)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Výpočet determinantu pomocou ERO

Príklad

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Kombinácia ERO, Laplaceovho rozvoja a Sarrusovho pravidla

Príklad

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-(1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1) = 1$$

Regulárna matica

Veta

Nech A je štvorcová matica typu $n \times n$. Matica A je regulárna práve vtedy, keď $|A| \neq 0$.

Determinant súčinu matíc

Veta

Nech A, B sú dve matice typu $n \times n$ nad poľom F. Potom platí

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Dôkaz pomocou definície

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 B \\ \vec{\alpha}_2 B \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n B \end{pmatrix}$$

Dôkaz pomocou definície

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} \vec{e}_{i_1} B \\ \vdots \\ \sum_{i_n=1}^{n} a_{ni_n} \vec{e}_{i_n} B \end{pmatrix}$$

Dôkaz pomocou definície

$$|AB| = \sum_{i_1=1}^{n} a_{1\,i_1} \begin{vmatrix} \vec{e}_{i_1} B \\ \sum_{i_2=1}^{n} a_{2\,i_2} \vec{e}_{i_2} B \\ \vdots \\ \sum_{i_n=1}^{n} a_{n i_n} \vec{e}_{i_n} B \end{vmatrix} = \ldots =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{1\,i_1} a_{2\,i_2} \ldots a_{n i_n} \begin{vmatrix} \vec{e}_{i_1} B \\ \vec{e}_{i_2} B \\ \vdots \\ \vec{e}_{i_n} B \end{vmatrix}$$

Dôkaz pomocou definície

$$|AB| = \sum_{\varphi \in S_n} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \dots a_{n\varphi(n)} \begin{vmatrix} \vec{e}_{\varphi(1)} B \\ \vec{e}_{\varphi(2)} B \\ \vdots \\ \vec{e}_{\varphi(n)} B \end{vmatrix}$$

$$|AB| = \sum_{\varphi \in S_n} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \dots a_{n\varphi(n)} (-1)^{i(\varphi)} |B| = |A| \cdot |B|.$$

Dôkaz pomocou ERO

- Ak A je singulárna, tak aj AB je singulárna a $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Ak A je regulárna, tak $A = E_1E_2\cdots E_n$ pre nejaké matice elementárnych riadkových operácia $E_1, E_2, \dots, E_n$.
- Stačí už len overiť pre každú ERO, že $\det(EB) = \det(E)\det(B)$

Determinant súčinu matíc

- Geometrická interpretácia: $\det(A)$ predstavuje koľkokrát sa zväčšil objem jednotkovej kocky zobrazením $\vec{x} \mapsto \vec{x}A$.
- Ak použijeme zložené zobrazenie $\vec{x} \mapsto \vec{x}AB$, tak sa objem zväčší prvým zobrazením $\det(A)$-krát, druhým zobrazením $\det(B)$-krát.
- Koľkonásobne sa zväčšil objem v zloženom zobrazení?

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Výpočet inverznej matice

Veta

Ak A je regulárna matica typu $n \times n$, tak

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

kde A_{ij} označuje algebraický doplnok prvku a_{ij}.

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{|A|}$$

Výpočet inverznej matice

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Cramerovo pravidlo

- Sústava s maticou A typu $n \times n$, ktorá je regulárna.
- Ako A_i označme maticu, kde sme i-ty stĺpec nahradili pravými stranami.

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$