Determinant – stručný prehľad

11. decembra 2023

Definícia determinantu

Definícia

Nech A je matica typu $n \times n$ nad poľom F, $A = ||a_{ij}||$.
Determinant matice A je

$$|A| = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \dots a_{n\varphi(n)}. \tag{1}$$

S_n=množina všetkých permutácií $\{1, 2, \dots, n\}$

Determinant matice 2×2 a 3×3

$$|A| = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{n\varphi(n)}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \\ &\quad - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31} \end{aligned}$$

Determinant matice 3×3

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} & \\
 & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & & & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} & \\
 & & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} & \\
 & & & & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown \\
 & & & & & & + & & + & +
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccccccc}
 & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\
 & & & & \diagup & & \diagup & & \diagup & \\
 & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\
 & & \diagup & & \diagup & & \diagup & & & \\
 & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \\
\diagup & & \diagup & & \diagup & & & & & \\
- & - & & - & & & & & &
\end{array}
$$

Definícia determinantu

- V definícii vystupuje $n!$ sčítancov.
- Všetky sú súčiny také, že z každého riadku a z každého stĺpca sme vybrali práve jeden prvok.
- Každý takýto súčin je vynásobený znamienkom, ktoré závisí od počtu inverzií.

Determinant transponovanej matice

Veta

Nech A je matica typu $n \times n$. Potom

$$|A| = |A^T|.$$

Algebraický doplnok

$$|A| = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \dots a_{n\varphi(n)}$$

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

Výraz A_{ij} nazývame *algebraický doplnok prvku* a_{ij}.

Algebraický doplnok

Veta

Pre algebraický doplnok prvku a_{rs} štvorcovej matice A platí

$$A_{rs} = (-1)^{r+s}|M_{rs}|.$$

- Dokážeme pre prípad $r = s = n$.
- Pri výmene susedných riadkov či stĺpcov sa zmení znamienko.
- Potrebujeme $(n - r - 1) + (n - s - 1) = 2(n - 1) - (r + s)$ výmen, aby sme previedli náš prípad na situáciu $r = s = n$.

Laplaceov rozvoj

Dôsledok (Laplaceov rozvoj determinantu)

Nech A je matica typu $n \times n$. Potom

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1}|M_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2}|M_{i2}| + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in}|M_{in}|$$
$$|A| = (-1)^{j+1} a_{1j}|M_{1j}| + (-1)^{j+2} a_{2j}|M_{2j}| + \ldots + (-1)^{j+n} a_{nj}|M_{nj}|$$

Prvú rovnosť uvedenú v predchádzajúcom dôsledku nazývame *Laplaceov rozvoj determinantu matice A podľa i-teho riadku*, druhú *Laplaceov rozvoj podľa j-teho stĺpca.*

Znamienka v Laplaceovom rozvoji

$$(-1)^{i+j}$$

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{matrix}$$

ERO a determinant

Veta

Ak maticu B získame z A vynásobením k-teho riadku skalárom $c \in F$, tak

$$|B| = c|A|.$$

Dôsledok

Ak matica A má nulový riadok, tak $|A| = 0$.

Dôsledok

Pre maticu $A \in M_{n,n}(F)$ a $c \in F$ platí

$$|cA| = c^n|A|.$$

Rovnaké riadky

Veta

Ak má matica A dva rovnaké riadky, tak $|A| = 0$.

Dôkaz: Matematická indukcia + Laplaceov rozvoj

Súčet riadkov (multilineárnosť)

Veta

Nech matice A a B sú matice typu $n \times n$, ktoré sa líšia len v k-tom riadku. Potom $|A| + |B| = |C|$, kde $c_{ij} = a_{ij} = b_{ij}$ pre $i \neq k$ a $c_{kj} = a_{kj} + b_{kj}$.

$$
\begin{aligned}
D(\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_{i-1}, c\vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_{i+1}, \dots, \vec{\alpha}_n) &= cD(\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_{i-1}, \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_{i+1}, \dots, \vec{\alpha}_n) \\
D(\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_{i-1}, \vec{\alpha}_i + \vec{\beta}_i, \vec{\alpha}_{i+1}, \dots, \vec{\alpha}_n) &= D(\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_{i-1}, \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_{i+1}, \dots, \vec{\alpha}_n) \\
&\quad + D(\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_{i-1}, \vec{\beta}_i, \vec{\alpha}_{i+1}, \dots, \vec{\alpha}_n)
\end{aligned}
$$

Pripočítanie násobku

Veta

Ak matica B vznikne z A pripočítaním c-násobku niektorého riadku k inému (pričom $c \in F$), tak $|B| = |A|$.

Výmena riadkov

Veta

Ak matica B vznikne z A vzájomnou výmenou dvoch riadkov, tak $|B| = -|A|$. *(Výmena 2 riadkov matice mení znamienko determinantu.)*

Horná trojuholníková matica

Veta

Ak A je horná trojuholníková matica (pod hlavnou diagonálou má nuly), tak determinant matice A sa rovná súčinu prvkov na diagonále.

$$|A| = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Dôsledok

Determinant diagonálnej matice sa rovná súčinu diagonálnych prvkov.

$$\begin{vmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \dots d_n$$

Horná trojuholníková matica

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \dots d_n$$

Regulárna matica

Veta

Nech A je štvorcová matica typu $n \times n$. Matica A je regulárna práve vtedy, keď $|A| \neq 0$.

Determinant súčinu matíc

Veta

Nech A, B sú dve matice typu $n \times n$ nad poľom F. Potom platí

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Výpočet inverznej matice

Veta

Ak A je regulárna matica typu $n \times n$, tak

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

kde A_{ij} označuje algebraický doplnok prvku a_{ij}.

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{|A|}$$

Výpočet inverznej matice

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Cramerovo pravidlo

- Sústava s maticou A typu $n \times n$, ktorá je regulárna.
- Ako A_i označme maticu, kde sme i-ty stĺpec nahradili pravými stranami.

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$