Skalárny súčin

19. februára 2024

Stredná škola

$$\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos\varphi,$$

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{\langle\vec{\alpha},\vec{\alpha}\rangle}.$$

Definícia skalárneho súčinu

Definícia

Nech $(V, +, \cdot)$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$. Potom zobrazenie $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ sa nazýva *skalárny súčin* na V, ak pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a $c \in \mathbb{R}$ platí

(i) $g(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = g(\vec{\beta}, \vec{\alpha})$,

(ii) $g(\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = g(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) + g(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$,

(iii) $g(c\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = cg(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$,

(iv) ak $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, tak $g(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) > 0$.

Vektorový priestor V spolu so skalárnym súčinom g nazývame *euklidovským vektorovým priestorom.*

Definícia skalárneho súčinu

(i) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle$,

(ii) $\langle \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle = \langle \vec{\alpha}, \vec{\gamma} \rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle$,

(iii) $\langle c\vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = c\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$,

(iv) ak $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, tak $\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle > 0$.

Ekvivalentná formulácia (iv): Pre každý vektor platí $\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle \geq 0$ a rovnosť nastane práve vtedy, keď $\vec{\alpha} = \vec{0}$.
T.j. skalárny súčin je zobrazenie $V \times V \to \mathbb{R}$, ktoré je symetrické, bilineárne a kladne definitné.
Nad $\mathbb{C}$: $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \overline{\langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle}$

Príklady skalárnych súčinov

$V = \mathbb{R}^n$

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

štandardný skalárny súčin v $\mathbb{R}^n$

Príklady skalárnych súčinov

- $V = \mathbb{R}^2$ a $\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + 2a_2 b_2$
- $V = \mathbb{R}^n$ a

$$\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle = (a_1 \dots a_n) C \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \vec{\alpha} C \vec{\beta}^T,$$

  pre niektoré matice C.
- $V = C(a, b)$ a

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

  (Takýto skalárny súčin súvisí s Fourierovými radmi.)

Veľkosť vektora

Definícia

Nech V je euklidovský vektorový priestor. Potom pre $\vec{\alpha} \in V$ definujeme veľkosť vektora $\vec{\alpha}$ ako

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}.$$

Alternatívne označenie: $\|\vec{\alpha}\|$

Veľkosť vektora

Tvrdenie

Nech V je euklidovský vektorový priestor. Pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a $c \in \mathbb{R}$ platí:

(i) $|\vec{\alpha}| \geq 0$

(ii) $|\vec{\alpha}| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$

(iii) $|c\vec{\alpha}| = |c||\vec{\alpha}|$

(iv) $|\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle| \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ (*Schwarzova nerovnosť*)

(v) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ (*trojuholníková nerovnosť*)

V (iv) *nastáva rovnosť práve vtedy, keď vektor $\vec{\alpha}$ je násobkom vektora $\vec{\beta}$.*
V (v) *nastane rovnosť, ak $\vec{\alpha}$ je nezáporným násobkom $\vec{\beta}$.*

Schwarzova nerovnosť

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2} \tag{1}$$

Dôkaz Schwarzovej nerovnosti

$$\begin{aligned}
|\vec{\alpha} + c\vec{\beta}|^2 &= \langle \vec{\alpha} + c\vec{\beta}, \vec{\alpha} + c\vec{\beta} \rangle \\
&= \langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle + 2c\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle + c^2 \langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \rangle \\
&= |\vec{\alpha}|^2 + 2c\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle + c^2 |\vec{\beta}|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Dôkaz Schwarzovej nerovnosti

$$|\vec{\alpha}|^2 + 2c\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle + c^2|\vec{\beta}|^2 \geq 0$$
$$D = 4\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle^2 - 4|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2 \leq 0$$
$$\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle^2 \leq |\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2$$
$$|\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle| \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$$

Dôkaz trojuholníkovej nerovnosti

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 = \langle \vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\alpha}+\vec{\beta}\rangle = \langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha}\rangle + 2\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{\beta}\rangle =$$

$$|\vec{\alpha}|^2 + 2\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle + |\vec{\beta}|^2 \overset{(1)}{\leq} |\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| + |\vec{\beta}|^2 = (|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|)^2$$

Uhol vektorov

Definícia

Nech V je euklidovský vektorový priestor.
Uhol dvoch nenulových vektorov definujeme ako taký uhol, pre ktorý platí

$$\cos\varphi = \frac{\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}.$$

V prípade, že niektorý z vektorov je nulový, položíme $\varphi = 0$.

Kolmé vektory

Definícia

Vektory $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ nazveme *kolmé* (*ortogonálne*), ak $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0$.
O k-tici vektorov $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_k$ hovoríme, že tieto vektory sú ortogonálne, ak ľubovoľné 2 z nich sú ortogonálne, t.j. $\langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j \rangle = 0$ pre každé $i \neq j$.

Tvrdenie

Nech V je euklidovský vektorový priestor. Ak nenulové vektory $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_k$ sú ortogonálne, tak sú lineárne nezávislé.

Ortogonálny doplnok

Definícia

Nech V je euklidovský priestor a $M \subseteq V$. Potom

$$M^{\perp} = \{\vec{\alpha} \in V; \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0 \text{ pre všetky } \vec{\beta} \in M\}$$

sa nazýva *ortogonálny doplnok* množiny M.

Tvrdenie

Nech V je euklidovský priestor a $M \subseteq V$. Potom $M^{\perp}$ je vektorový podpriestor priestoru V.

Ortogonálny doplnok

Tvrdenie

Ak V je euklidovský priestor a $M \subseteq N \subseteq V$, tak

$$N^{\perp} \subseteq M^{\perp}.$$

Ortogonálny doplnok

Lema

Nech V je euklidovský priestor a $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_k \in V$. Nech $S = [\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_k]$ je podpriestor vygenerovaný týmito vektormi. Potom $S^{\perp} = \{\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_k\}^{\perp}$.

Ortogonálny doplnok

Tvrdenie

Ak V je euklidovský priestor a S, T sú podpriestory V, tak

$$(S + T)^{\perp} = S^{\perp} \cap T^{\perp}.$$