Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

19. februára 2024

Ortonormálna báza

Definícia

Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sa nazývajú *ortonormálne*, ak pre všetky i platí $|\vec{\alpha}_i| = 1$ a pre $i \neq j$ platí

$$\langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j \rangle = 0.$$

Definícia

Ak vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú ortonormálne a tvoria bázu vektorového priestoru V, tak túto bázu nazývame *ortonormálna báza*.

Príklad: štandardná báza $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ v priestore $\mathbb{R}^n$ so štandardným skalárnym súčinom

Ortonormálna báza

$$\vec{\alpha} = c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n \text{ a } \vec{\beta} = d_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + d_n\vec{\alpha}_n$$

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \langle c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n, d_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + d_n\vec{\alpha}_n \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i d_j \langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j \rangle.$$

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i d_i.$$

Ortonormálna báza

Veta

Nech V je euklidovský vektorový priestor a $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V. Potom existuje ortonormálna báza $\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n$ priestoru V.

Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

$$
\begin{aligned}
\vec{\gamma}_1 &= \vec{\alpha}_1 \\
\vec{\gamma}_2 &= \vec{\alpha}_2 + c_{21}\vec{\gamma}_1 \\
\vec{\gamma}_3 &= \vec{\alpha}_3 + c_{31}\vec{\gamma}_1 + c_{32}\vec{\gamma}_2 \\
&\vdots \\
\vec{\gamma}_n &= \vec{\alpha}_n + c_{n1}\vec{\gamma}_1 + c_{n2}\vec{\gamma}_2 + \ldots + c_{n,n-1}\vec{\gamma}_{n-1}
\end{aligned}
$$

$$[\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_k] = [\vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_k]$$

Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

$$\vec{\gamma}_{k+1} = \vec{\alpha}_{k+1} + c_{k+1,1}\vec{\gamma}_1 + c_{k+1,2}\vec{\gamma}_2 + \ldots + c_{k+1,k}\vec{\gamma}_k$$

$$[\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_{k+1}] = [\vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_{k+1}]$$

$$\begin{aligned}
0 = \langle \vec{\gamma}_{k+1}, \vec{\gamma}_1 \rangle &= \langle \vec{\alpha}_{k+1}, \vec{\gamma}_1 \rangle + c_{k+1,1} \langle \vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_1 \rangle \\
0 = \langle \vec{\gamma}_{k+1}, \vec{\gamma}_2 \rangle &= \langle \vec{\alpha}_{k+1}, \vec{\gamma}_2 \rangle + c_{k+1,2} \langle \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_2 \rangle \\
0 = \langle \vec{\gamma}_{k+1}, \vec{\gamma}_3 \rangle &= \langle \vec{\alpha}_{k+1}, \vec{\gamma}_3 \rangle + c_{k+1,3} \langle \vec{\gamma}_3, \vec{\gamma}_3 \rangle \\
&\vdots \\
0 = \langle \vec{\gamma}_{k+1}, \vec{\gamma}_k \rangle &= \langle \vec{\alpha}_{k+1}, \vec{\gamma}_k \rangle + c_{k+1,k} \langle \vec{\gamma}_k, \vec{\gamma}_k \rangle
\end{aligned} \tag{1}$$

Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

$$\vec{\beta}_i = \frac{\vec{\gamma}_i}{|\vec{\gamma}_i|}$$

Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

$$V = [(1,0,1,0),(0,2,-1,1),(0,2,1,3)]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V = [(1,0,0,-1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)]$$

Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

$\vec{\gamma}_1 = \vec{\alpha}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\vec{\gamma}_2 = \vec{\alpha}_2 + c\vec{\gamma}_1$

$$c = -\frac{\langle \vec{\gamma}_1, \vec{\alpha}_2 \rangle}{\langle \vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_1 \rangle} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\vec{\gamma}_2 = (0, 1, 0, 1) + \frac{1}{2}(1, 0, 0, -1) = \left(\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

$$\vec{\gamma}_3 = \vec{\alpha}_3 + d\vec{\gamma}_1 + e\vec{\gamma}_2$$

$$d = -\frac{\langle \vec{\alpha}_3, \vec{\gamma}_1 \rangle}{\langle \vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_1 \rangle} = \frac{1}{2}$$

$$e = -\frac{\langle \vec{\alpha}_3, \vec{\gamma}_2 \rangle}{\langle \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_2 \rangle} = -\frac{1}{3}$$

$$\vec{\gamma}_3 = (0, 0, 1, 1) + \frac{1}{2}(1, 0, 0, -1) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$$

Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

$$\vec{\beta}_1 = \frac{\vec{\gamma}_1}{|\vec{\gamma}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)$$

$$\vec{\beta}_2 = \frac{\vec{\gamma}_2}{|\vec{\gamma}_2|} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{\beta}_3 = \frac{\vec{\gamma}_3}{|\vec{\gamma}_3|} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$$

Iná možnosť hľadania ortogonálnej bázy

$V = [(1,0,0,-1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)]$
$V^{\perp} = [(1,-1,-1,1)]$
$\vec{\gamma}_1 = \vec{\alpha}_1 = (1,0,0,-1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\vec{\gamma}_2 = (1,2,0,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\vec{\gamma}_3 = (1,-1,3,1)$

Vlastnosti $S^\perp$

Veta

Nech S je podpriestor konečnorozmerného euklidovského priestoru V. Potom ľubovoľný vektor $\vec{\gamma} \in V$ sa dá jednoznačne vyjadriť ako

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta},$$

kde $\vec{\alpha} \in S$ a $\vec{\beta} \in S^\perp$.

Definícia

V situácii z predošlej vety sa vektor $\vec{\alpha}$ nazýva *ortogonálna projekcia* vektora $\vec{\gamma}$ na podpriestor S.

Vlastnosti $S^\perp$

Dôsledok

Nech S, T sú podpriestory konečnorozmerného priestoru V. Potom:

(i) $V = S \oplus S^\perp$

(ii) $(S^\perp)^\perp = S$

(iii) $(S \cap T)^\perp = S^\perp + T^\perp$.

Priestor ℓ_2

$$V = \ell_2 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty\}$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

Priestor ℓ_2

$$S = \{(x_n) \in \ell_2; x_n = 0 \text{ pre všetky } n \text{ okrem konečného počtu}\}$$

$$S^\perp = \{0\}$$

$$S \oplus S^\perp = S \neq V,$$
$$(S^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = V.$$