# Kvadratické formy

4. marca 2024

# Kvadratické formy

## Definícia

Výraz (polynóm)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ a $x_1, \ldots, x_n$ sú (komutujúce) premenné budeme nazývať *kvadratická forma* v premenných $x_1, \ldots, x_n$.

# Kvadratické formy

## Príklad

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

Pre $\vec{\alpha} = (x_1, \dots, x_n)$ a $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ je $\vec{\alpha}A\vec{\alpha}^T$kvadratická forma.

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

# Kvadratické formy a symetrické matice

**Veta**

*Každá kvadratická forma sa dá jednoznačne zapísať ako* $\vec{\alpha}B\vec{\alpha}^T$, *kde* $B$ *je symetrická matica.*

# Kanonický tvar kvadratickej formy

$$x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_1x_3+2x_2x_3+x_3^2 = (x_1+x_2+2x_3)^2+x_2^2-2x_2x_3-3x_3^2 = (x_1+x_2+2x_3)^2+(x_2-x_3)^2-4x_3^2 = (x_1+x_2+2x_3)^2+(x_2-x_3)^2-(2x_3)^2$$

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + 2x_3 \\ y_2 &= x_2 - x_3 \\ y_3 &= 2x_3 \end{aligned}$$

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

# Kanonický tvar kvadratickej formy

Ak $\vec{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\vec{\beta} = (y_1, y_2, y_3)$, tak máme

$$\vec{\beta} = \vec{\alpha} P,$$

kde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{\alpha} A \vec{\alpha}^T = \vec{\beta} P^{-1} A (P^{-1})^T \vec{\beta}^T.$$

$$D = P^{-1} A P^{-1\,T}$$

$$A = P D P^T$$

# Kanonický tvar kvadratickej formy

$$PDP^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

# Kongruentné matice

### Definícia

Hovoríme, že matice $A$ a $B$ sú *kongruentné*, ak existuje regulárna matica $P$ taká, že
$$A = PBP^T.$$

# Kanonický tvar kvadratickej formy

$$x_1 x_2 = \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} - \frac{(x_1 - x_2)^2}{4} = \left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}\right)^2.$$

$$y_1^2 - y_2^2$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_2 &= \frac{x_1 - x_2}{2} \end{aligned}$$

# Kanonický tvar kvadratickej formy

$$x_1 = y_1 + y_2$$
$$x_2 = y_1 - y_2$$

Pre matice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ opäť platí $A = PBP^T$. Alebo tiež obrátene, $B = QAQ^T$, kde $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

# Kanonický tvar kvadratickej formy

### Veta

*Pre ľubovoľnú kvadratickú formu* $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ *existuje regulárna transformácia premenných* $(y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_n)P$ *taká, že táto kvadratická forma sa dá v premenných* $y_1, \ldots, y_n$ *vyjadriť ako*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j = \sum_{k=1}^n d_k y_k^2,$$

*kde* $d_k \in \{0, \pm 1\}$.

*Zápis v tvare* $\sum\limits_{k=1}^n d_k y_k^2$ *budeme nazývať kanonický tvar kvadratickej formy* $\sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$.

# Kanonický tvar kvadratickej formy

**Dôsledok**

*Každá reálna symetrická matica typu $n \times n$ je kongruentná s nejakou diagonálnou maticou $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ takou, že $d_i \in \{0, \pm 1\}$ pre $i = 1 \ldots n$.*