Zákon zotrvačnosti

18. marca 2024

Zákon zotrvačnosti

Veta

Pre danú kvadratickú formu je počet výskytov $+1$ a počet výskytov -1 v jej kanonickom tvare jednoznačne určený (nezávisí od transformácie, ktorou sme túto kvadratickú formu previedli na kanonický tvar).

Dôsledok

Každá reálna symetrická matica typu $n \times n$ je kongruentná s nejakou diagonálnou maticou $\operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ takou, že $d_i \in \{0, \pm 1\}$ pre $i = 1 \dots n$.

Zákon zotrvačnosti

Príklad

$$x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_1x_3+2x_2x_3+x_3^2 = (x_1+x_2+2x_3)^2+x_2^2-2x_2x_3-3x_3^2 = (x_1+x_2+2x_3)^2+(x_2-x_3)^2-4x_3^2 = (x_1+x_2+2x_3)^2+(x_2-x_3)^2-(2x_3)^2$$

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + 2x_3 \\ y_2 &= x_2 - x_3 \\ y_3 &= 2x_3 \end{aligned}$$

Zákon zotrvačnosti

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$PDP^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Zákon zotrvačnosti

Príklad

Uvažujme kvadratickú formu $x_1 x_2$. Všimnime si, že

$$x_1 x_2 = \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} - \frac{(x_1 - x_2)^2}{4} = \left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}\right)^2 .$$

Kladná definitnosť

Definícia

Nech A je symetrická reálna matica. Hovoríme, že A je
a) *kladne semidefinitná*, ak pre každý vektor $\vec{\alpha}$ platí $\vec{\alpha}A\vec{\alpha}^T \geq 0$;
b) *kladne definitná*, ak pre každý nenulový vektor $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ platí $\vec{\alpha}A\vec{\alpha}^T > 0$;
c) *záporne semidefinitná*, ak pre každý vektor $\vec{\alpha}$ platí $\vec{\alpha}A\vec{\alpha}^T \leq 0$;
d) *záporne definitná*, ak pre každý nenulový vektor $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ platí $\vec{\alpha}A\vec{\alpha}^T < 0$.

Kladná definitnosť

Veta

Symetrická matica A je kladne definitná práve vtedy, keď existuje regulárna matica P taká, že $A = PP^T$.

Kladná definitnosť

Tvrdenie

Nech A je symetrická reálna matica typu $n \times n$. Uvažujme rohové determinanty

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ak rohové determinanty $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}$ sú nenulové, tak matica A je kongruentná s diagonálnou maticou $\mathrm{diag}(D_1, D_2/D_1, D_3/D_2, \dots, D_n/D_{n-1})$.

Kladná definitnosť

Predpokladáme, že $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1} \neq 0$. Matematickou indukciou o matici A ukážeme:

- Dá sa upraviť na maticu $\mathrm{diag}(D_1, D_2/D_1, D_3/D_2, \ldots, D_n/D_{n-1})$ striedavými riadkovými a stĺpcovými úpravami.
- Pričom nám stačí používať úpravy typu „pripočítanie násobku riadka/stĺpca k inému". (Tieto úpravy nemenia determinant.)

Kladná definitnosť

Veta

Nech A je symetrická matica typu $n \times n$. Matica A je kladne definitná práve vtedy, keď všetky jej hlavné minory $D_1, \dots, D_n$ sú kladné.

Dôsledok

Nech A je symetrická matica typu $n \times n$. Matica A je záporne definitná práve vtedy, keď hlavný minor D_k má rovnaké znamienko ako $(-1)^k$ pre všetky $k = 1, \dots, n$. (Teda znamienka hlavných minorov sú striedavo $(-, +, -, +, \dots)$.)

Hessián

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0.$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$