Podobnosť matíc

18. marca 2024

Súradnice vektora

Definícia

Ak $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza vektorového priestoru V nad poľom F a $\vec{\gamma} \in V$, tak n-ticu $(c_1, \dots, c_n) \in F^n$ takú, že platí

$$\vec{\gamma} = c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n$$

nazývame *súradnicami vektora $\vec{\gamma}$ v báze $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$*.

Matica prechodu

Definícia

Nech $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ a $\vec{\alpha}'_1, \ldots, \vec{\alpha}'_n$ sú dve bázy vektorového priestoru V nad poľom F. Nech $p_{ij} \in F$ sú také, že platí

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}'_1 &= p_{11}\vec{\alpha}_1 + p_{12}\vec{\alpha}_2 + \cdots + p_{1n}\vec{\alpha}_n \\
\vec{\alpha}'_2 &= p_{21}\vec{\alpha}_1 + p_{22}\vec{\alpha}_2 + \cdots + p_{2n}\vec{\alpha}_n \\
&\vdots \\
\vec{\alpha}'_n &= p_{n1}\vec{\alpha}_1 + p_{n2}\vec{\alpha}_2 + \cdots + p_{nn}\vec{\alpha}_n
\end{aligned} \tag{1}$$

Potom maticu $P = \|p_{ij}\|$ nazývame *matica prechodu* od bázy $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ k báze $\vec{\alpha}'_1, \ldots, \vec{\alpha}'_n$.

i-ty riadok = súradnice vektoru $\vec{\alpha}'_i$ v báze $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$.

Prechod opačným smerom

Veta

Ak P je matica prechodu od bázy $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ k báze $\vec{\alpha}'_1, \ldots, \vec{\alpha}'_n$, tak matica P je regulárna a matica P^{-1} je matica prechodu opačným smerom, teda od $\vec{\alpha}'_1, \ldots, \vec{\alpha}'_n$ k $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$.

Zápis pomocou matíc

$$\vec{\gamma} = \vec{x} \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha}'_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}'_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Prechod opačným smerom

Tvrdenie

Nech $P = \|p_{ij}\|$ je regulárna matica typu $n \times n$ a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza vektorového priestoru V. Potom aj vektory $\vec{\alpha}'_1, \dots, \vec{\alpha}'_n$ určené vzťahmi

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}'_1 &= p_{11}\vec{\alpha}_1 + p_{12}\vec{\alpha}_2 + \cdots + p_{1n}\vec{\alpha}_n \\
\vec{\alpha}'_2 &= p_{21}\vec{\alpha}_1 + p_{22}\vec{\alpha}_2 + \cdots + p_{2n}\vec{\alpha}_n \\
&\vdots \\
\vec{\alpha}'_n &= p_{n1}\vec{\alpha}_1 + p_{n2}\vec{\alpha}_2 + \cdots + p_{nn}\vec{\alpha}_n
\end{aligned}$$

tvoria bázu priestoru V.

Zmena bázy

Veta

Nech $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ a $\vec{\alpha}'_1, \dots, \vec{\alpha}'_n$ sú bázy vektorového priestoru V. Nech P je matica prechodu od bázy $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ k báze $\vec{\alpha}'_1, \dots, \vec{\alpha}'_n$. Nech $\vec{\gamma} \in V$ a $(x_1, \dots, x_n)$ sú súradnice vektora $\vec{\gamma}$ v báze $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$, $(x'_1, \dots, x'_n)$ sú jeho súradnice v báze $\vec{\alpha}'_1, \dots, \vec{\alpha}'_n$. Potom platí

$$(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n)P.$$

Matica zobrazenia v danej báze

Definícia

Nech V je vektorový priestor a $f\colon V \to V$ je lineárne zobrazenie. Nech $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza V. *Matica zobrazenia f vzhľadom na bázu $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$* je matica $A = \|a_{ij}\|$ taká, že platí

$$f(\vec{\alpha}_i) = a_{i1}\vec{\alpha}_1 + \cdots + a_{in}\vec{\alpha}_n.$$

i-ty riadok = súradnice obrazu i-teho bázového vektora v tejto báze

Matica zobrazenia v danej báze

Tvrdenie

Nech V je vektorový priestor, $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza V a $f \colon V \to V$ je lineárne zobrazenie. Ak A je matica zobrazenia f pri báze $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ a vektor $\vec{\gamma}$ má v tejto báze súradnice $(x_1, \dots, x_n)$, tak jeho obraz $f(\vec{\gamma})$ má v tej istej báze súradnice

$$(x_1, \dots, x_n)A.$$

Zmena bázy

Veta

Nech V je vektorové priestory, $f : V \to V$ je lineárne zobrazenie a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$, $\vec{\alpha}'_1, \dots, \vec{\alpha}'_n$ sú bázy priestoru V. Ak P je matica prechodu od $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ k $\vec{\alpha}'_1, \dots, \vec{\alpha}'_n$, A je matica zobrazenia f pri báze $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ a B je matica tohoto zobrazenia pri báze $\vec{\alpha}'_1, \dots, \vec{\alpha}'_n$, tak platí

$$B = PAP^{-1}. \tag{3}$$

Zmena bázy

Definícia

Nech A, B sú štvorcové matice nad poľom F. Ak existuje matica P taká, že $B = PAP^{-1}$, hovoríme, že matice A a B sú *podobné.*

Podobnosť matíc je relácia ekvivalencie.