Kombinatorické princípy

27. februára 2024

Sčítací princíp

Pre ľubovoľné množiny A, B také, že $A \cap B = \emptyset$ platí:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Všeobecnejšie, ak máme množiny $A_1, \ldots, A_n$, ktoré sú po dvoch disjunktné, tak

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

Násobiaci princíp

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k|.$$

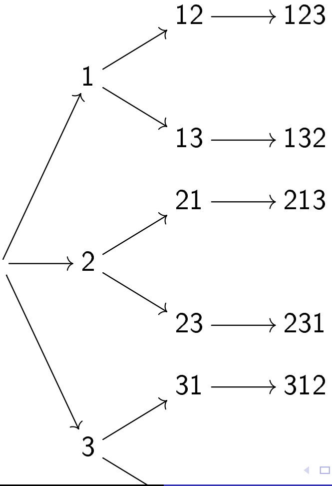
Násobiaci princíp

Tvrdenie (Násobiaci princíp)

Ak množina A pozostáva z usporiadaných k-tic, pričom na prvej pozícii sa môže vyskytnúť práve n_1 množností a pre každú voľbu $a_1, \dots, a_{j-1}$ máme práve $n - 1$ možností, ktoré sa môžu vyskytnúť na j-tej pozícii, tak počet prvkov množiny A je

$$|A| = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k = \prod_{j=1}^{k} n_j.$$

Počet permutácií



Počet permutácií

Tvrdenie

Počet permutácií množiny n je

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 1.$$

$0! = 0$

Počet variácií

Definícia

Pre $k, n \in \mathbb{N}$ usporiadaný výber k prvkov z n-prvkovej množiny nazývame *variácia k-tej triedy z n prvkov.*

Tvrdenie

Počet variacií k-tej triedy z n prvkov je

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1).$$

Rastúca a klesajúca mocnina

$$x^{\underline{k}} = x(x-1)\cdots(x-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(x-i)$$

$$x^{\overline{k}} = x(x+1)\cdots(x+k-1) = \prod_{i=0}^{k-1}(x+i)$$

$$x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1$$

Počet podmnožín

Pre $n \in \mathbb{N}_0$ a $k \in \mathbb{Z}$ zaveďme označenie $\binom{n}{k}$ pre počet k-prvkových podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Všimnime si, že pre pre $k < 0$ aj pre $k > n$ automaticky máme $\binom{n}{k} = 0$.

Poznámka

To, že symbol $\binom{n}{k}$ zavádzame aj pre $k < 0$ má zmysel hlavne preto, že nám to zjednoduší zápis niektorých tvrdení a dôkazov – nebudeme musieť zvlášť ošetriť niektoré krajné prípady. (Ale treba si dávať aspoň trochu pozor – nie úplne všetko čo uvedieme bude platiť aj pre záporné k. Určite minimálne pri prvých použitiach tejto konvencie na ňu upozorníme.)

Počet podmnožín

Tvrdenie

Počet k-prvkových podmnožín n-prvkovej množiny pre $k, n \in \mathbb{N}_0$ je:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \qquad (1)$$

Pascalova identita

Veta

Pre ľubovoľné $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_0$ *platí:*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \tag{2}$$

Pascalova identita

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

- Pre $k = 0$ táto rovnosť vlastne hovorí $\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n}{0}$.
- Pre $k = n+1$ sa táto rovnosť zmení na $\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n}$.
- Pre $k < 0$ aj $k > n+1$ sú obe strany nulové.

Pascalova identita

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Podmnožiny $A \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$ môžeme rozdeliť na dve časti:

- Tie, ktoré obsahujú nulu. Okrem nuly takéto množiny ešte musia obsahovať $k-1$ prvkov z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$; je ich teda práve $\binom{n}{k-1}$.
- Ak $0 \notin A$, tak A je podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Takýchto podmnožín je práve $\binom{n}{k}$.

Pascalova identita

$$P_k = \{A \in P_k; 0 \in A\} \cup \{A \in P_k; 0 \notin A\}$$

$$|P_k| = |\{A \in P_k; 0 \in A\}| \cup |\{A \in P_k; 0 \notin A\}|$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Pascalova identita

Dôkaz algebraickými úpravami.

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{1}{k} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{1}{n-k+1} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n+1}{(n-k+1)k} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}
\end{aligned}
$$

Pascalov trojuholník

$$
\begin{array}{cccccc}
\binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \binom{3}{0} & \binom{4}{0} & \binom{5}{0} \\
\binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \binom{5}{1} & \\
\binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \binom{5}{2} & & \\
\binom{3}{3} & \binom{4}{3} & \binom{5}{3} & & & \\
\binom{4}{4} & \binom{5}{4} & & & & \\
\binom{5}{5} & & & & &
\end{array}
$$

Pascalov trojuholník

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
1 & 3 & 6 & 10 & & \\
1 & 4 & 10 & & & \\
1 & 5 & & & & \\
1 & & & & &
\end{array}
$$

Pascalov trojuholník

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5}$$
$$\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6}$$
$$\binom{8}{0} \quad \binom{8}{1} \quad \binom{8}{2} \quad \binom{8}{3} \quad \binom{8}{4} \quad \binom{8}{5} \quad \binom{8}{6}$$

Pascalov trojuholník

								1								
							1		1							
						1		2		1						
					1		3		3		1					
				1		4		6		4		1				
			1		5		10		10		5		1			
		1		6		15		20		15		6		1		
	1		7		21		35		35		21		7		1	
1		8		28		56		70		56		28		8		1

Počet zobrazení

$$|\{f : A \to B\}| = |B|^{|A|}$$

$$0^0 = 1$$

Princíp bijekcie

Veta

Počet všetkých podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ *je* 2^n*.*
Počet všetkých podmnožín ľubovoľnej n-prvkovej množiny je 2^n*.*

- Môžeme to dokázať matematickou indukciou.
- Alebo aj použitím princípu bijekcie.

Princíp bijekcie

Veta

Počet všetkých podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ je 2^n.
Počet všetkých podmnožín ľubovoľnej n-prvkovej množiny je 2^n.

$$\mathcal{P}(M) \to \{0,1\}^M$$

$$A \mapsto \chi_A$$

Počítanie dvoma spôsobmi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Súčet riadku Pascalovho trojuholníka

Veta

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \tag{3}$$

Dôkaz matematickou indukciou

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 1+3 & & 3+3 & & 3+1 & & 1 \end{array}$$

Počítaním dvoma spôsobmi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Obe strany tejto rovnosti vyjadrujú počet všetkých podmnožín n-prvkovej množiny.

Súčet po diagonále

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=?$$

$$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}=?$$

$$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}=?$$

$$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}=?$$

$$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}=?$$

Súčet po diagonále

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5}$$

$$\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6}$$

$$\binom{8}{0} \quad \binom{8}{1} \quad \binom{8}{2} \quad \binom{8}{3} \quad \binom{8}{4} \quad \binom{8}{5} \quad \binom{8}{6}$$

Hokejková identita

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Hokejková identita

Tvrdenie (Hokejková identita)

Pre ľubovoľné $k, n \in \mathbb{N}_0$ platí:

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1} \tag{4}$$

Hokejková identita

								1								
							1		1							
						1		2		1						
					1		3		3		1					
				1		4		6		4		1				
			1		5		10		10		5		1			
		1		6		15		20		15		6		1		
	1		7		21		35		35		21		7		1	
1		8		28		56		70		56		28		8		1

Hokejková identita

								1								
							1		1							
						1		2		1						
					1		3		3		1					
				1		4		6		4		1				
			1		5		10		10		5		1			
		1		6		15		20		15		6		1		
	1		7		21		35		35		21		7		1	
1		8		28		56		70		56		28		8		1

Hokejková identita

								1								
							1		1							
						1		2		1						
					1		3		3		1					
				1		4		6		4		1				
			1		5		10		10		5		1			
		1		6		15		20		15		6		1		
	1		7		21		35		35		21		7		1	
1		8		28		56		70		56		28		8		1

Hokejková identita

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Počítanie dvoma spôsobmi

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Koľko je podmnožín $A \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$ takých, že $\max A = j$?

Hokejková identita – ešte trochu inak

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\sum_{j=k}^{s-1} \binom{j}{k} = \binom{s}{k+1}$$

Odčítaním dostaneme:

$$\sum_{j=s}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{s}{k+1}$$

$$\binom{s}{k+1} + \sum_{j=s}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Hokejková identita – ešte trochu inak

$$\sum_{j=s}^{s+l-1} \binom{j}{k} = \binom{s+l}{k+1} - \binom{s}{k+1}$$
$$\binom{s}{k+1} + \sum_{j=s}^{s+l-1} \binom{j}{k} = \binom{s+l}{k+1} \tag{5}$$

$$5 + 10 + 20 = 35$$
$$\binom{5}{4} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = \binom{7}{4}$$