

Stromy

4. apríla 2024

Sled, ťah, cesta

Definícia

Nech $G = (V, E)$ je graf. Postupnosť $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ kde pre $v_0, \dots, v_k \in V$ a $e_1, \dots, e_k \in E$ nazývame *sled*, ak $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ pre $i = 0, 1, \dots, k - 1$.

Sled v ktorom sa neopakujú žiadne hrany nazývame *ťah*. Sled, v ktorom sa neopakujú žiadne vrcholy nazývame *cesta*.

Definícia

Ak pre sled $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ platí $v_0 = v_k$, t.j. prvý a posledný vrchol je rovnaký, nazývame ho *uzavretý sled*. Ak je uzavretý sled súčasne ťahom, voláme ho *uzavretý ťah*.

Uzavretý ťah taký, že s výnimkou prvého a posledného vrchola sa v ňom iné vrcholy už neopakujú nazývame *kružnica*.

Súvislé grafy

Definícia

Graf $G = (V, E)$ sa nazýva *súvislý*, ak pre ľubovoľné vrcholy $u, v \in V$ existuje cesta z u do v .

Komponenty súvislosti:

- ▶ Existencia cesty = relácia ekvivalencie.
- ▶ Vrcholy grafu vieme rozdeliť na disjunktné podmnožiny, ktoré už určujú súvislé podgrafy.

Stromy

Definícia

Súvislý graf, ktorý neobsahuje nijakú kružnicu, sa nazýva *strom*.
Inak: Strom je súvislý acyklický graf.

Stromy

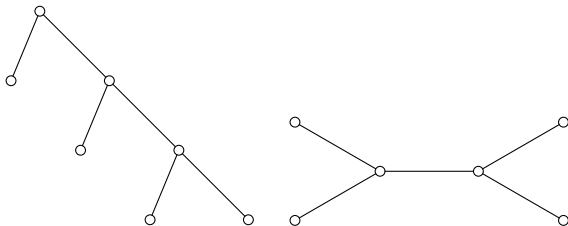


Figure: Príklady stromov

Listy

Tvrdenie

Každý strom, ktorý má aspoň dva vrcholy, má aspoň dva vrcholy stupňa 1.

Tvrdenie

Nech $G = (V, E)$ je graf, ktorý obsahuje vrchol v stupňa 1. Graf G je strom práve vtedy, keď indukovaný podgraf na množine $V \setminus \{v\}$ je strom.

Počet hrán

Tvrdenie

Nech T je strom, ktorý má n vrcholov. Potom T má práve $n - 1$ hrán.

Tvrdenie

Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf ktorý má n vrcholov a $n - 1$ hrán. Potom G je strom.

Rôzne charakterizácie stromov

Veta

Nech $G = (V, E)$ je graf, ktorý má n vrcholov. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- i. G je strom.*
- ii. G je súvislý a má $n - 1$ hrán.*
- iii. Pre ľubovoľné $x, y \in V$ existuje práve jedna cesta z x do y .*
- iv. Graf G je súvislý a súčasne odstránením ľubovoľnej hrany dostaneme nesúvislý graf.*
- v. Graf G je acyklický a pridaním ľubovoľnej novej hrany dostaneme kružnicu.*