Planárne grafy

24. apríla 2024

Planárne grafy

Definícia

Graf sa nazýva *planárny graf* alebo *rovinný graf* ak je možné nakresliť graf v rovine takým spôsobom, že sa v tomto nakreslení nijaké dve hrany nepretínajú.

Planárne grafy

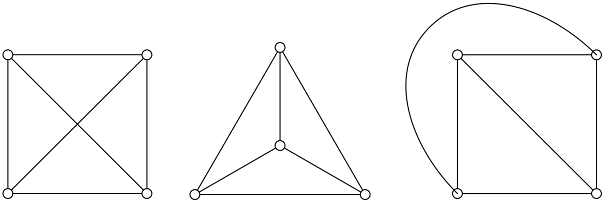


Figure: Graf K_4 nakreslený rôznymi spôsobmi

Planárne grafy

- rovinné nakreslenie
- steny
- vonkajšia stena
- stereografická projekcia

Planárne grafy

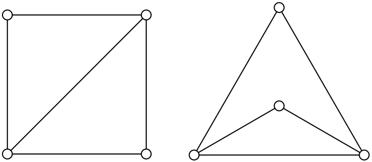


Figure: Počet hrán vonkajšej steny sa môže pri rôznych nakresleniach líšiť

Planárne grafy

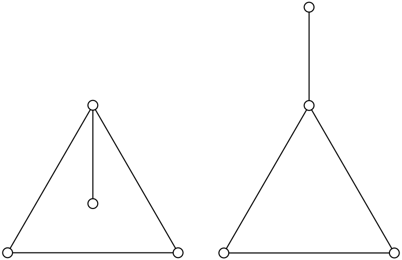


Figure: Hrana susediaca s jedinou stenou

Eulerova formula

Veta (Eulerova formula)

Ak pre nejaký súvislý rovinný graf označuje v počet vrcholov, h počet hrán a s počet stien, pričom $v \geq 1$, tak platí

$$v - h + s = 2. \tag{1}$$

Eulerova formula

Ak by sme vynechali predpoklad, že graf je súvislý, tak dostaneme

$$v - h + s = 1 + c, \tag{2}$$

kde c označuje počet komponentov súvislosti.

Nutné podmienky

Veta

Ak G je planárny graf, ktorý má v vrcholov a h hrán, pričom $v \geq 3$. Potom platí

$$h \leq 3v - 6.$$

Dôsledok

Graf K_5 nie je planárny.

Tvrdenie

Každý rovinný graf obsahuje vrchol stupňa ≤ 5.

Nutné podmienky

Veta

Ak G je planárny graf, ktorý má v vrcholov a h hrán, pričom $v \geq 3$. Potom platí

$$h \leq 3v - 6.$$

$$3s \leq 2h$$

$$3(2 + h - v) \leq 2h$$

$$h \leq 3v - 6$$

Graf K_5 nie je planárny

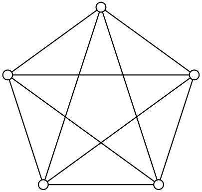


Figure: Graf K_5 nie je planárny

- $v = 5$
- $h = \binom{5}{2} = 10$
- Počet hrán je väčší než $3v - 6 = 9$.

Vrchol stupňa ≤ 5

Tvrdenie

Každý rovinný graf obsahuje vrchol stupňa ≤ 5.

$$\sum_{i=1}^{v} d_i = 2h$$

$$6v \leq 2h$$

$$6v \leq 2h \leq 6v - 12$$

Kompletný bipartitný graf

Definícia

Kompletný bipartitný graf $K_{m,n}$ je graf, v ktorom množina vrcholov pozostáva z dvoch disjunktných častí $V = V_1 \cup V_2$, takých, že množina hrán je $E = \{\{u, v\}; u \in V_1, v \in V_2\}$, pričom $|V_1| = m$.

Stručne: Máme m-prvkovú množinu V_1 a n-prvkovú množinu V_2 a každý vrchol z V_1 je spojený s každým vrcholom z V_2. (A žiadne iné hrany už v tomto grafe nie sú.)

Kompletný bipartitný graf

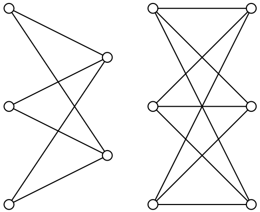


Figure: Grafy $K_{3,2}$ a $K_{3,3}$

Graf $K_{n,2}$ je planárny

Graf $K_{n,2}$ je planárny.

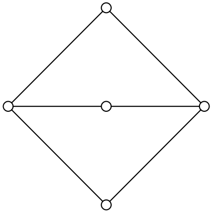


Figure: Graf $K_{3,2}$ je planárny

Nutné podmienky

Veta

Nech G je súvislý planárny graf, ktorý má v vrcholov a h hrán, pričom $v \geq 3$. Ak G neobsahuje kružnicu dĺžky 3, tak platí

$$h \leq 2v - 4$$

Dôsledok

Graf $K_{3,3}$ nie je planárny.

Nutné podmienky

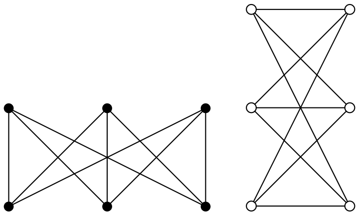
Veta

Nech G je planárny graf, ktorý má v vrcholov a h hrán, pričom $v \geq 3$. Ak G neobsahuje kružnicu dĺžky 3, tak platí

$$h \leq 2v - 4$$

$$4s \leq 2h$$
$$4(2 + h - v) \leq 2h$$
$$2h \leq 4v - 8$$
$$h \leq 2v - 4$$

Graf $K_{3,3}$ nie je planárny



$v = 6$, $h = 9$ a $2v - 4 = 8$

Nutné podmienky

Definícia

Nech $G = (V, E)$ je graf. *Obvod grafu* je dĺžka najkratšej kružnice v grafe. (Ak graf neobsahuje žiadne kružnice, tak obvod položíme rovný ∞.)

Veta

Nech G je graf obsahujúci aspoň jeden cyklus, ktorý má v vrcholov, h hrán a jeho obvod je g. Ak graf G je planárny, tak platí

$$h \leq \frac{g(v-2)}{g-2}.$$

Nutné podmienky

Veta

Nech G je graf obsahujúci aspoň jeden cyklus, ktorý má v vrcholov, h hrán a jeho obvod je g. Ak graf G je planárny, tak platí

$$h \leq \frac{g(v-2)}{g-2}.$$

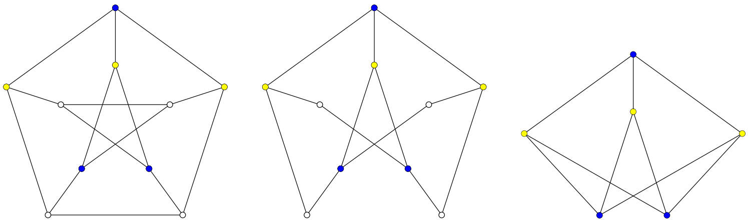
$$g = 3 \qquad \Rightarrow \qquad h \leq 3(v-2) = 3v - 6$$

$$g = 4 \qquad \Rightarrow \qquad h \leq 2(v-2) = 2v - 4$$

Zakázané podgrafy

- Kuratowského veta
- Wagnerova veta

Petersenov graf nie je planárny



Platónske telesá

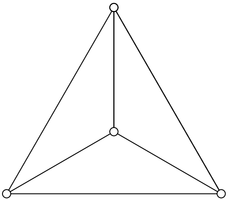
- Každý vrchol má rovnaký stupeň, označme ho d. Potom platí $2h = vd$.
- Každá stena nech má m hrán. Máme $2h = ms$.

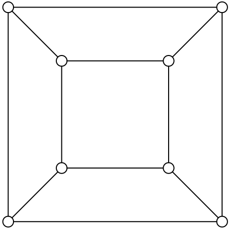
$$2 = v - h + s = \frac{2h}{d} - h + \frac{2h}{m}$$
$$\frac{2}{h} + 1 = \frac{2}{d} + \frac{2}{m}$$
$$\frac{1}{h} + \frac{1}{2} = \frac{1}{d} + \frac{1}{m}$$

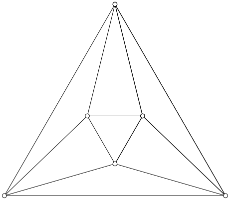
Platónske telesá

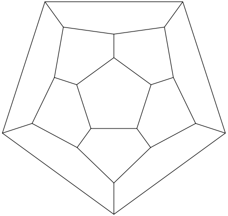
d	m	h	v	s
3	3	6	4	4
3	4	12	8	6
3	5	30	20	12
4	3	12	6	8
5	3	30	12	20

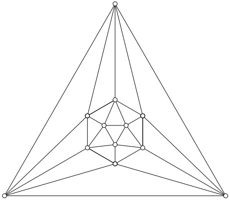
Platónske telesá











d	m	h	v	s
3	3	6	4	4
3	4	12	8	6
3	5	30	20	12
4	3	12	6	8
5	3	30	12	20