

Diskrétna matematika, kombinatorika, grafy
(elementárne poznámky)

Martin Sleziak

2. mája 2024

Obsah

1	Úvod	4
1.1	Sylaby	4
1.2	Literatúra	4
1.3	Označenie	4
2	Kombinatorické princípy	6
2.1	Sčítovanie a násobenie	6
2.1.1	Sčítací a násobiaci princíp	6
2.1.2	Počet permutácií a podmnožín	7
2.1.3	Pascalova identita a Pascalov trojuholník	9
2.1.4	Počet zobrazení	11
2.1.5	Rôzne príklady využívajúce sčítací a násobiaci princíp	11
2.2	Bijekcia	11
2.3	Počítanie dvoma spôsobmi	12
2.3.1	Súčet riadku Pascalovho trojuholníka	12
2.3.2	Binomické koeficienty po diagonále – hokejková identita	14
3	Výber s opakovaním	22
3.1	Kombinácie a permutácie s opakovaním	22
3.1.1	Permutácie s opakovaním	22
3.1.2	Kombinácie s opakovaním	23
3.2	Počet celočíselných riešení $x_1 + \dots + x_k = n$	25
4	Binomické koeficienty	29
4.1	Definícia binomického koeficientu	29
4.2	Binomická veta	30
4.3	Vlastnosti binomických koeficientov	35
4.4	Sumy s binomickými koeficientami	37
4.4.1	Vandermondova identita	37
4.4.2	Niektoré ďalšie sumy	37
4.5	Prechádzky po mriežke	38
4.6	Nerovnosti a asymptotické vlastnosti	39
4.6.1	Faktoriál	39
4.7	Binomická veta s reálnym exponentom	40
4.8	Multinomická veta	42

5	Princíp zapojenia a vypojenia	43
5.1	Formulácia a dôkaz princípu zapojenia a vypojenia	43
5.2	Permutácie bez pevného bodu	48
5.2.1	Definícia a rekurzívne vyjadrenie	48
5.2.2	Vyjadrenie D_n pomocou princípu inklúzie a exklúzie	50
5.2.3	Ďalšie vlastnosti D_n	52
5.3	Počet surjektívnych zobrazení	53
5.4	Eulerova funkcia	54
5.4.1	Vyjadrenie Eulerovej funkcie pomocou prvočíselného rozkladu	54
5.4.2	Niektoré vlastnosti Eulerovej funkcie	58
5.4.3	Eulerova funkcia a kongruencie	58
5.5	Möbiova funkcia	60
5.6	Ešte raz $x_1 + \dots + x_k = n$	61
6	Stirlingove, Catalanove a iné čísla	67
6.1	Počet rozkladov – Stirlingove a Bellove čísla	67
6.1.1	Stirlingove čísla druhého druhu	68
6.2	Catalanove čísla	68
7	Fibonacciho čísla	69
7.1	Definícia Fibonacciho a Lucasových čísel	69
7.2	Fibonacciho čísla a matice	69
7.3	Základné vlastnosti Fibonacciho čísel	70
7.4	Kombinatorická interpretácia Fibonacciho čísel	70
7.5	Sumy s Fibonacciho číslami	71
7.5.1	Sumy obsahujúce Fibonacciho čísla	71
7.5.2	Fibonacciho čísla a binomické koeficienty	71
7.6	Fibonacciho čísla a deliteľnosť	72
8	Jednoduché rekurencie	73
8.1	Lineárne homogénne rekurencie s konštantnými koeficientami	73
9	Grafy	74
9.1	Základné pojmy	74
9.2	Stromy	77
9.3	Planárne grafy	80
9.3.1	Eulerova formula	80
9.3.2	$K_{3,3}$ a K_5 ako zakázané podgrafy	85
9.3.3	Pravidelné rovinné grafy a platónske telesá	86
9.4	Farbenie grafov	88
9.4.1	Bipartitné grafy	89
9.4.2	Veta o piatich farbách	90
9.5	Eulerovské grafy	91
9.6	Hamiltonovské grafy	93
9.6.1	Nutné podmienky	93
9.6.2	Postačujúce podmienky – Bondy–Chvátalova veta	93
9.6.3	Petersenov graf nie je hamiltonovský	94
	Register	99
	Zoznam symbolov	100

Kapitola 1

Úvod

Tento text je do značnej miery zamýšľaný ako doplnok k predmetu 1-MAT-725 Diskrétna matematika (2). Samozrejme, nie je to tak, že by veci v texte boli úplne totožné s tým, čo sa vyskytne na prednáškach a cvičeniach.

- Nie každý školský rok sa stihne prebrať to isté.
- Navyše sa predmet môže trochu vyvíjať – postupom času možno pribudnú nejaké témy, ktoré budem chcieť pridať. A naopak, niektoré možno vynechám.
- A azda nie je na škodu občas sem dať nejaké veci, ktoré sú zaujímavé a súvisia s preberanou látkou – aj keď na hodine sa prebrať nestihnú.

Tento text sa bude postupom času vyvíjať – čiže verziu, ktorú máte pre sebou, určite nepovažujte za finálnu. V texte takéhoto rozsahu sa určite vyskytnú aj chyby a preklepy; budem sa ich v rámci svojich možností snažiť postupne opravovať.

Na niektorých miestach síce uvediem detailné dôkazy – ale často nejaké dôkazy (najmä jednoduchšie) nechám ako cvičenia. Takisto na veľa miestach pridám iba odkaz na literatúru, kde sa dá nájsť dôkaz.

Aj pri tých tvrdeniach či príkladoch, kde je v texte uvedený dôkaz, je určite pre čitateľa užitočné ak sa najprv samostatne zamyslí nad tým, či by mal aspoň nejaké nápady, ktorým smerom by sa dalo uberať – prípadne či by daný problém vedel vyriešiť aj samostatne. (Aspoň pri tých jednoduchších dôkazoch a úlohách by to určite je zvládnutelné.)

1.1 Sylaby

Základné kombinatorické princípy, funkcie a podmnožiny, permutácie a faktoriály, binomické koeficienty, princíp inklúzie a exklúzie, kombinatorické identity, pojem grafu, izomorfizmus, súvislosť, eulerovské a hamiltonovské grafy, stromy a kostry, počet stromov, optimálna kostra, rovinné grafy, farbenie grafov a máp.

1.2 Literatúra

1.3 Označenie

Pre číselné množiny budeme používať obvyklé označenie \mathbb{C} pre komplexné čísla, \mathbb{R} pre reálne čísla, \mathbb{Q} pre racionálne čísla. Symbolom \mathbb{Z} budeme označovať množinu všetkých celých čísel.

V tomto texte budeme používať

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z}; n > 0\};$$

$$\mathbb{N}_0 = \{n \in \mathbb{Z}; n \geq 0\};$$

t.j. \mathbb{N} je množina všetkých kladných celých čísel a \mathbb{N}_0 je množina všetkých nezáporných celých čísel. Inak povedané, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Pravdepodobne ste sa už stretli s tým, že niektoré texty nulu rátajú ako prirodzené číslo, niektoré nie. (A určite je to tak, že v rôznych kontextoch môže byť niektorá z týchto dvoch možností prirodzenejšia. Napríklad ak chceme, aby prirodzené čísla predstavovali veľkosti konečných množín, tak chceme zahrnúť aj nulu ako počet prvkov prázdnej množiny.) Azda takéto označenie – kde priamo v zápise \mathbb{N}_0 je vyznačené, že sú to prirodzené čísla vrátane nuly – pomôže tomu, aby v tom nebol priveľký zmätok.

Kapitola 2

Kombinatorické princípy

2.1 Sčítovanie a násobenie

2.1.1 Sčítací a násobiaci princíp

Pre ľubovoľné množiny A, B také, že $A \cap B = \emptyset$ platí:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Všeobecnejšie, ak máme množiny A_1, \dots, A_n , ktoré sú po dvoch disjunktné, tak

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

T.j. platí

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|,$$

ak $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre všetky $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ také, že $i \neq j$.

Poznámka 2.1.1. Vlastne podobné veci aké tu spomíname pre súčet (súčin, umocnenie) veľkostí konečných množín poznáte z minulého semestra aj pre nekonečné množiny – v takom prípade označenie $|A|$ označuje kardinalitu množiny A . Na tomto predmete sa budeme zaoberať počtami prvkov najmä pre konečné množiny. Určite nie všetky veci, ktoré spomenieme, platia aj pre nekonečné množiny. (Pri niektorých môže byť problém už len ich zmysluplne v kontexte nekonečných množín sformulovať.)

Podobne vieme vypočítať aj počet prvkov karteziánskeho súčinu. T.j. vieme, že platí

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Indukciou to vieme ľahko rozšíriť na

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|.$$

Často však potrebujeme počítat počet prvkov (n -tíc, zoznamov, možností, usporiadaní), kde sa síce nevyskytujú *tie isté* prvky, ale na každej pozícii máme rovnaký počet možností – aj keď to nie sú prvky presne z tej istej množiny.

Tvrdenie 2.1.2 (Násobiaci princíp). *Ak množina A pozostáva z usporiadaných k -tic, pričom na prvej pozícii sa môže vyskytnúť práve n_1 množností a pre každú voľbu a_1, \dots, a_{j-1} máme práve $n - 1$ možností, ktoré sa môžu vyskytnúť na j -tej pozícii, tak počet prvkov množiny A je*

$$|A| = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k = \prod_{j=1}^k n_j.$$

2.1.2 Počet permutácií a podmnožín

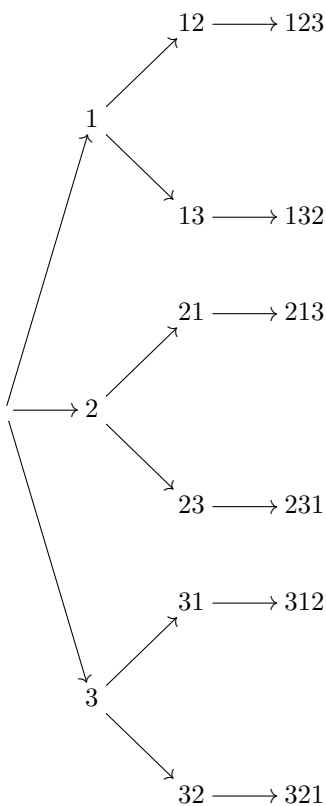
Ako ilustráciu násobiaceho princípu môžeme použiť počet permutácií množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. T.j. chceme vlastne počítať injektívne zobrazenia $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

Vyskúšajme to najprv pre $n = 3$. Ak chceme systematicky vypísať všetky permutácie množiny $\{1, 2, 3\}$, môžeme začať tým, že si vyberieme, kam sa zobrazí číslo 1. Máme tri možnosti – jednotku, dvojku, a trojku.

Keď si vyberáme čo zvolíme na druhej pozícii, tak nesmieme zopakovať prvok, ktorí sme už vybrali na prvej pozícii. Teda máme dve možnosti.

Podobná situácia sa zopakuje na tretej pozícii. Teraz máme už dva zakázané prvky, zostala nám jediná možnosť.

Postup, ktorým sme vytvárali permutácie, je ilustrovaný nasledovným stromom. Môžeme si všimnúť, že na každej úrovni je rovnaký počet vetvení – to je presne vlastnosť dôležitá pri násobiacom princípe.



Podobne to funguje pre viac prvkov, vidíme teda, že platí:

Tvrdenie 2.1.3. Počet permutácií množiny n je

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdots 1.$$

Týmto sme súčasne zdefinovali symbol $n!$, ktorý nazývame *faktoriál*. Definitorky položíme $0! = 0$.

Definícia 2.1.4. Pre $k, n \in \mathbb{N}$ usporiadaný výber k prvkov z n -prvkovej množiny nazývame *variácia k -tej triedy z n prvkov*.

Tvrdenie 2.1.5. Počet variácií k -tej triedy z n prvkov je

$$n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1).$$

Rovnaký výsledok dostaneme, ak počítame injektívne zobrazenia $\{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. Pretože sa nám takéto niečo bude na viacerých miestach hodiť, zavedme označenie

$$x^{\underline{k}} = x(x - 1) \cdots (x - k + 1) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - i)$$

$$x^{\overline{k}} = x(x + 1) \cdots (x + k - 1) = \prod_{i=0}^{k-1} (x + i)$$

pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. V oboch prípadoch ide o súčin k čísel, pričom začíname číslom x a každý nasledujúci sčítanec je o jedno menší a v druhom prípade o jedno väčší.

Hodí sa nám dodefinovať

$$x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1,$$

pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$. (Je to konzistentné so vzťahmi uvedenými vyššie, keď prázdny súčin berieme ako jednotku.)

Pre $n \in \mathbb{N}$ vieme oba výrazy zapísať pomocou faktoriálov.

$$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n - k)!}$$

$$n^{\overline{k}} = \frac{(n + k - 1)!}{(n - 1)!}$$

Zatiaľ sme sa pozerali na počet rôznych výberov, pri ktorých záležalo na poradí. Čo sa stane ak nezáleží na poradí?

Pre $n \in \mathbb{N}_0$ a $k \in \mathbb{Z}$ zavedme označenie $\binom{n}{k}$ pre počet k -prvkových podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Všimnime si, že pre $k < 0$ aj pre $k > n$ automaticky máme $\binom{n}{k} = 0$.

{suc:POZNBINOMZAPORNE}

Poznámka 2.1.6. To, že symbol $\binom{n}{k}$ zavádzame aj pre $k < 0$ má zmysel hlavne preto, že nám to zjednoduší zápis niektorých tvrdení a dôkazov – nebudeme musieť zvlášť ošetriť niektoré krajné prípady. (Ale treba si dávať aspoň trochu pozor – nie úplne všetko čo uvedieme bude platiť aj pre záporné k . Určite minimálne pri prvých použitíach tejto konvencie na ňu upozorníme.)

Tvrdenie 2.1.7. Počet k -prvkových podmnožín n -prvkovej množiny pre $k, n \in \mathbb{N}_0$ je:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n(n - 1) \cdots (n - k + 1)}{k!} = \frac{n!}{(n - k)!k!} \quad (2.1)$$

{suc:EQBINFACT}

Dôkaz. Pre každú k -prvkovú podmnožinu máme $k!$ rôznych usporiadaní. Máme teda dve vyjadrenia pre variácie k -tej triedy z n -prvkov ako

$$k! \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Z toho dostaneme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

□

2.1.3 Pascalova identita a Pascalov trojuholník

{suc:VTPASCAL}

Veta 2.1.8. Pre ľubovoľné $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_0$ platí:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad (2.2) \quad \text{{suc:EQPASCAL}}$$

Všimnime si najprv niekoľko špeciálnych prípadov, kedy sú niektoré z uvedených binomických koeficientov nulové:

- Pre $k = 0$ táto rovnosť vlastne hovorí $\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n}{0}$.
- Pre $k = n + 1$ sa táto rovnosť zmení na $\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n}$.
- Pre $k < 0$ aj $k > n + 1$ sú obe strany nulové.

Teda nám zostáva zdôvodniť túto rovnosť v prípade, že $1 \leq k \leq n$. (Ako sme už spomenuli v poznámke 2.1.6, zahrnutie aj týchto triviálnych prípadov nám zjednoduší aj formuláciu tvrdenia ale je užitočné aj pri zápise niektorých dôkazov.)

Rovnosť (2.2)

Dôkaz. Vieme, že $\binom{n+1}{k}$ vyjadruje počet všetkých k -prvkových podmnožín množiny $\{0, 1, \dots, n\}$.

Podmnožiny $A \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ môžeme rozdeliť na dve časti:

- Tie, ktoré obsahujú nulu. Okrem nuly takéto množiny ešte musia obsahovať $k-1$ prvkov z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$; je ich teda práve $\binom{n}{k-1}$.
- Ak $0 \notin A$, tak A je podmnožina množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Takýchto podmnožín je práve $\binom{n}{k}$.

Spolu máme teda $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ takýchto podmnožín.

Samozrejme, obe vyjadrenia pre počet k -prvkových podmnožín množiny $\{0, 1, \dots, n-1\}$ sa musia rovnať, a teda platí

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

□

V predchádzajúcom dôkaze sme využili sčítací princíp keď sme náš systém k -prvkových podmnožín rozdelili na dve disjunktné časti. Kvôli stručnosti označme ako P_k množinu všetkých k -prvkových podmnožín $\{0, 1, \dots, n\}$. Potom vlastne celý dôkaz môžeme stručne zapísať ako:

$$\begin{aligned} P_k &= \{A \in P_k; 0 \in A\} \cup \{A \in P_k; 0 \notin A\} \\ |P_k| &= |\{A \in P_k; 0 \in A\}| \cup |\{A \in P_k; 0 \notin A\}| \\ \binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \binom{3}{0} & \binom{4}{0} & \binom{5}{0} \\
 \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \binom{5}{1} & \\
 \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \binom{5}{2} & & \\
 \binom{3}{3} & \binom{4}{3} & \binom{5}{3} & & & \\
 \binom{4}{4} & \binom{5}{4} & & & & \\
 \binom{5}{5} & & & & &
 \end{array}$$

2.1.4 Počet zobrazení

TODO

$$\{f: A \rightarrow B\} = |B|^{|A|}$$

{suc:POZNONAO}

Poznámka 2.1.9. $0^0 = 1$

2.1.5 Rôzne príklady využívajúce sčítací a násobiaci princípy

2.2 Bijekcia

{bij:VTDVANAN}

Veta 2.2.1. Počet všetkých podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ je 2^n .

Počet všetkých podmnožín ľubovoľnej n -prvkovej množiny je 2^n .

Druhá časť uvedenej vety znie výrazne všeobecnejšie ako prvá – nie je ťažké si uvedomiť, že dve n -prvkové množiny musia mať aj rovnaký počet podmnožín. (Alebo všeobecnejšie, ľubovoľná bijekcia $X \rightarrow Y$ nám automaticky dáva aj bijekciu $\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$.)

Jedna možnosť ako dokázať výsledok o počte podmnožín n -prvkovej množiny by bola matematickou indukciou.

Dôkaz matematickou indukciou. Označme ako p_n počet podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, n\}$

1° Vyššie sme už skontrolovali, že platí $p_0 = 1 = 2^0$ a $p_1 = 2 = 2^1$.

2° Na zdôvodnenie indukčného kroku nám pre $n \geq 1$ stačí dokázať

$$p_n = 2p_{n-1}.$$

Zdôvodnenie tohto vzťahu ponecháme ako cvičenie (úloha 2.2.1). □

TODO

Dôkaz. TODO

$$\mathcal{P}(M) \rightarrow \{0, 1\}^M$$

$$A \mapsto \chi_A$$

Symbol χ_A označuje *charakteristickú funkciu* množiny A , t.j. funkciu $\chi_A: M \rightarrow \{0, 1\}$ definovanú ako

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in A, \\ 0 & \text{ak } x \notin A. \end{cases}$$

□

Cvičenia

{bijcvic:ULOP}

Úloha 2.2.1. Označme ako p_n počet všetkých podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}$ platí $p_n = 2p_{n-1}$. (Hint: Koľko je podmnožín takých, že $1 \in A$? Koľko je podmnožín takých, že $1 \notin A$?)

2.3 Počítanie dvoma spôsobmi

Pri dôkaze rôznych kombinatorických identít sa často dá použiť prístup, kde ukážeme, že ľavá aj pravá strana dokazovanej rovnosti predstavujú počet prvkov tej istej množiny – len vypočítaný iným spôsobom. My si túto metódu ukážeme konkrétne na dvoch identitách týkajúcich sa binomických koeficientov:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n,$$

$$\sum_{j=k}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Tieto dve rovnosti ukážeme ako rovnosť (2.3) vo vete 2.3.1 a rovnosť (2.4) v tvrdení 2.3.2.

2.3.1 Súčet riadku Pascalovho trojuholníka

{dvoma:VTSUMDVANAN}

Veta 2.3.1. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

{dvoma:EQSUMDVANAN}

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad (2.3)$$

Táto rovnosť vlastne predstavuje súčet všetkých čísel v riadku n Pascalovho trojuholníka. Ak si človek vyskúša zrátať tento súčet pre niekoľko prvých riadkov, tak by určite uhádol, že sa výsledok vždy zdvojnásobuje.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1 + 1 &= 2 \\ 1 + 2 + 1 &= 4 \\ 1 + 3 + 3 + 1 &= 8 \\ 1 + 4 + 6 + 4 + 1 &= 16 \\ 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 &= 32 \\ 1 + 6 + 15 + 10 + 20 + 15 + 6 + 1 &= 64 \end{aligned}$$

Možno sa aj dá zbadáť – ak si uvedomíme ako súvisia prvky v dvoch po sebe idúcich riadkoch – že máme v nasledujúcom riadku vždy dvakrát tie čísla, ktoré sa vyskytli v predošlom riadku:

$$\begin{aligned} 1 + 4 + 6 + 4 + 1 &= 16 \\ 1 + (1 + 3) + (3 + 3) + (3 + 1) + 1 &= 8 + 8 \end{aligned}$$

V uvedenej rovnosti sú čísla zvýraznené dvoma farbami aby bolo vidno, že sme rozdelili každý binomický koeficient na časť, ktorá je v predchádzajúcom riadku **naľavo** a **napravo**. Každé

číslo z tretieho riadku sa vo štvrtom riadku (po takomto prepísaní) objaví dvakrát – raz v jednej farbe a raz v druhej.

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & + & 3 & & 3 + & 3 & & 1 \\ & & & & & & & & & 1 \end{array}$$

Dôkaz matematickou indukciou. Dokážeme rovnosť

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

pre $n \in \mathbb{N}_0$ matematickou indukciou vzhľadom na n .

1° Pre $n = 0$ aj $n = 1$ uvedená rovnosť platí:

$$\begin{aligned} \binom{0}{0} &= 1 = 2^0 \\ \binom{1}{0} + \binom{1}{1} &= 1 + 1 = 2^1 \end{aligned}$$

2° Predpokladajme, že uvedená rovnosť platí pre n . Pre $n + 1$ dostaneme:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\ &= 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\ &\stackrel{IP}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \end{aligned}$$

V jednom z krokov sme vynechali nulové členy $\binom{n}{n+1} = \binom{n}{-1} = 0$ a skrátili tak sumu o jeden člen. (Opäť pripomeniem konvenciu, na ktorú sme upozornili v poznámke 2.1.6.) \square

Na tomto mieste sme však tento výsledok uviedli z toho dôvodu, že na ňom chceme ilustrovať inú metódu, ktorá sa dá použiť aj pri dôkazoch mnohých iných kombinatorických identít. Ak o ľavej aj pravej strane nejakej rovnosti ukážeme, že predstavujú počet prvkov tej istej množiny, tak je jasné, že sa musia rovnať.

Dôkaz. Vieme, že počet podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ je rovný 2^n (veta 2.2.1).

Tieto podmnožiny môžeme rozdeliť podľa počtu prvkov na 0-prvkové, jednoprvkové, dvojprvkové, atď. Počet k -prvkových podmnožín je práve $\binom{n}{k}$, pričom tento počet môže byť nennulový iba pre $k = 0, 1, \dots, n$. Dostávame teda

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

\square

Pri počítaní nezaškodí mať niekde poruke Pascalov trojuholník – z neho vyčítame hodnoty jednotlivých binomických koeficientov asi pomerne rýchlo.

					1								
					1	1							
					1	2	1						
					1	3	3	1					
					1	4	6	4	1				
					1	5	10	10	5	1			
					1	6	15	20	15	6	1		
					1	7	21	35	35	21	7	1	
					1	8	28	56	70	56	28	8	1

Toto bol prípad $k = 4$. Môžeme podobné súčty vyskúšať aj pre iné hodnoty, ako napríklad $k = 3$:

$$\begin{aligned}
 1 + 3 &= 4 \\
 1 + 3 + 6 &= 10 \\
 1 + 3 + 6 + 10 &= 20 \\
 1 + 3 + 6 + 10 + 15 &= 35
 \end{aligned}$$

Ďalšie experimentovanie už nechám na Vás, ale možno po pár pokusoch by sa už malo dať uhádnuť, ako bude vyzeráť výsledok.

{dvoma:TVRHOKEJ}

Tvrdenie 2.3.2 (Hokejková identita). *Pre ľubovoľné $k, n \in \mathbb{N}_0$ platí:*

$$\sum_{j=k}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1} \tag{2.4}$$

{dvoma:EQHOKEJ}

					1								
					1	1							
					1	2	1						
					1	3	3	1					
					1	4	6	4	1				
					1	5	10	10	5	1			
					1	6	15	20	15	6	1		
					1	7	21	35	35	21	7	1	
					1	8	28	56	70	56	28	8	1

Samozrejme, keďže Pascalov trojuholník je symetrický, mohli by sme všetky sčítance symetricky otočiť.

					1								
					1	1							
					1	2	1						
					1	3	3	1					
					1	4	6	4	1				
					1	5	10	10	5	1			
					1	6	15	20	15	6	1		
					1	7	21	35	35	21	7	1	
					1	8	28	56	70	56	28	8	1

2° Prepokladajme, že tvrdenie platí pre n . Chceme sa pozrieť na tú istú sumu pre $n + 1$. Dostaneme:

$$\begin{aligned}\sum_{j=k}^{n+1} \binom{j}{k} &\stackrel{IP}{=} \binom{n+1}{k} + \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} \\ &= \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} \\ &= \binom{n+2}{k+1}.\end{aligned}$$

Dokázali sme, že potom tvrdenie platí aj pre $n + 1$. □

{POZNMIDVEPREMENNE}

Poznámka 2.3.3. Pomerne bežne sa stane, že sa snažíme matematickou indukciou dokázať pre všetky prirodzené čísla dokázať nejaký výrok $V(n, k)$, ktorý závisí od dvoch premenných. Vtedy sa zvyčajne treba zamyslieť nad tým, že ako to budeme dokazovať. Môžeme si napríklad vybrať, či dokazujeme tvrdenie indukciou na n alebo na k , t.j. dokazujeme niektorý z výrokov:

$$\begin{aligned}P_1(n) &\equiv (\forall k)V(n, k) \\ P_2(k) &\equiv (\forall n)V(n, k)\end{aligned}$$

A často sa môže vyskytnúť situácia, kedy sa človeku hodí niečo úplne iné; napríklad zaviesť nejakú pomocnú premennú a dokazovať to indukciou vzhľadom na ňu. (Ako trebárs $s = \max\{n, k\}$ alebo $t = l + k$.) Obvykle ak sa človek pokúsi urobiť nejakým spôsobom indukčný krok, tak pritom môže prísť na to, čo by mu mohlo pomôcť.

V predchádzajúcom dôkaze sme zvolili mali dve premenné n a k , zvolili sme indukciu vzhľadom na n . Môžete si vyskúšať, že pokus dokázať tvrdenie v podobe ako je sformulované (2.4) nevyzerá byť úplne priamočiary.

Podme sa však pozrieť na to, či by sme tú istú identitu vedeli dokázať aj použitím kombinatorickej interpretácie binomických koeficientov – opäť tu chceme ilustrovať počítanie dvoma spôsobmi.

Dôkaz. Počet $(k + 1)$ -prvkových podmnožín množiny $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ je $\binom{n+1}{k+1}$.

Rozdelme tieto množiny podľa toho, ktorý prvok je najväčší vybratej podmnožiny; môžeme si ho rovno označiť ako $j = \max A$. Keďže chceme $k + 1$ prvkov, ako najväčší prvok sa môžu vyskytnúť iba $j = k, \dots, n$. (Najmenšie možné j dostaneme ak vyberieme $k + 1$ najmenších možných prvkov, t.j. pre podmnožinu $\{0, 1, \dots, j\}$.)

Ak si zafixujeme j , koľko je možností ako vybrať $(k + 1)$ -prvkovú podmnožinu, ktorej najväčším prvkom je j ? Je to to isté, ako vyberať k -prvkovú podmnožinu množiny $\{0, 1, \dots, j-1\}$, teda máme $\binom{j}{k}$ možností. Zistili sme teda, že počet všetkých $(k+1)$ -prvkových podmnožín môžeme vyjadriť aj ako $\sum_{j=k}^n \binom{j}{k}$, a teda dostávame rovnosť

$$\sum_{j=k}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

□

Môžeme si všimnúť, z (2.4) vieme pomerne ľahko dostať aj vzťah pre súčet nejakého úseku diagonály Pascalovho trojuholníka, ktorý nezačína hneď od okraja. Stačí nám odčítať tieto dve rovnosti:

$$\sum_{j=k}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\sum_{j=k}^{s-1} \binom{j}{k} = \binom{s}{k+1}$$

a dostaneme

$$\sum_{j=s}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{s}{k+1}.$$

Túto rovnosť môžeme ekvivalentne vyjadriť aj ako

$$\binom{s}{k+1} + \sum_{j=s}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Skúsme tú istú rovnosť prepísať ešte aj trochu inak - nie pomocou premenných s a n určujúcich začiatok a koniec úseku, ktorý sčítujeme, ale tak, že v rovnosti bude vystupovať dĺžka sčítovaného úseku.

$$\sum_{j=s}^{s+l-1} \binom{j}{k} = \binom{s+l}{k+1} - \binom{s}{k+1}$$

$$\binom{s}{k+1} + \sum_{j=s}^{s+l-1} \binom{j}{k} = \binom{s+l}{k+1} \tag{2.5} \quad \{\text{dvoma:EQHOKEJUSEK}\}$$

V takejto podobe vieme túto rovnosť pomerne pohodlne dokázať indukciou vzhľadom na l :

Dôkaz. 1° Pre $l = 0$ dostaneme

$$\binom{s}{k+1} = \binom{s}{k+1}.$$

Pre $l = 1$ máme

$$\binom{s}{k+1} + \binom{s}{k} = \binom{s+1}{k+1},$$

čo je presne Pascalova identita.

2° Predpokladajme, že platí rovnosť (2.5), chceme ukázať zodpovedajúcu rovnosť pre $l+1$. Dostaneme:

$$\begin{aligned} \binom{s}{k+1} + \sum_{j=s}^{s+l} \binom{j}{k} &= \binom{s}{k+1} + \sum_{j=s}^{s+l-1} \binom{j}{k} + \binom{s+l}{k} \\ &\stackrel{IP}{=} \binom{s+l}{k+1} + \binom{s+l}{k} \\ &= \binom{s+l+1}{k+1}. \end{aligned}$$

To je presne rovnosť, ktorú sme mali dokázať. □

Vlastne sme rovnosť (2.4) resp. (2.5) dokazovali matematickou indukciou trikrát. Dôvod, prečo sme uviedli aj tento tretí dôkaz, je ten, že takto sformulovaný dôkaz sa asi najviac podobá na obrázky, ktoré sme kreslili, keď sme začali rozmýšľať o takýchto súčtoch. Napríklad na jednom obrázku sme mali naznačený súčet:

$$5 + 10 + 20 = 35$$

$$\binom{5}{4} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = \binom{7}{4}$$

Toto je naozaj špeciálny prípad identity (2.5) pre $s = 5$, $k = 3$, $l = 2$. A snažili sme sa spomenuté obrázky nakresliť tak, aby sa z nich dal vidieť nejaký všeobecný argument pre túto rovnosť. Na každom z obrázkov sme mali červenou farbou vyznačenú ľavú stranu a modrou farbou pravú stranu rovnosti $\binom{s}{k+1} + \sum_{j=s}^{s+l-1} \binom{j}{k} = \binom{s+l}{k+1}$ pre nejaké k, l, s .

Cvičenia

Úloha 2.3.1. Ukážte, že rovnosť

{principyvic:EQTRIANGLE}

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (2.6)$$

sa dá dostať ako špeciálny prípad hokejkovej identity (2.4).

{ULOSUMSTVORCEDVOMA}

Úloha 2.3.2. [E, 5.E15] Ukážte, že počet usporiadaných trojíc (x, y, z) takých, že $x, y, z \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ a $z > \max\{x, y\}$ sa dá dvoma spôsobmi vyjadriť ako

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}.$$

Poznáte nejaké iné vyjadrenia pre súčet prvých n druhých mocnín? Zhoduje sa výsledok s tým, čo vyšlo tu?

{ULOSUMSTVORCEHOKEJ}

Úloha 2.3.3. Vedeli by ste dostať nejaké vyjadrenie pre $\sum_{k=1}^n k^2$ využitím rovností $k^2 = 2\binom{k}{2} + k$ resp. $k^2 = 2\binom{k+1}{2} - k$?

{ULOSUMSTVORCEHOKEJ2}

Úloha 2.3.4. Vedeli by ste dostať nejaké vyjadrenie pre $\sum_{k=1}^n k^2$ využitím $k^2 = \binom{k}{2} + \binom{k-1}{2}$?

{ULOBINOMSYM}

Úloha 2.3.5. Zdôvodnite, že $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. (Pre všetky prípustné hodnoty k a n .)

Úloha 2.3.6. Koľko je štvorciferných čísel, kde všetky cifry sú párne?
Koľko z nich je deliteľných štyrmi?

Úloha 2.3.7. Koľko sa dá zostaviť 5-ciferných kódov používajúcich číslice $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ takých, kde práve n cifier je nepárnych.

Úloha 2.3.8. Koľko sa dá zostaviť 5-ciferných kódov používajúcich číslice $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ takých, kde sa práve jedna cifra opakuje dvakrát (a všetky ostatné sú rôzne).

T.j. napríklad 01023, 22469, 12341 sú možnosti, ktoré chceme započítať. Ale možnosti ako 12345, 01234 nepočítame (neopakuje sa nič), takisto ani 00112, 01210 (dve opakujúce sa cifry) a ani 82818, 24144 (tu sú tri opakovania niektorej cifry).

Úloha 2.3.9. Kolkými spôsobmi môžeme položiť tri

- a) rovnaké
- b) rôzne

šachové figúrky na štandardnú šachovnicu 8×8 , ak sa žiadne z nich nesmú nachádzať v tom istom riadku ani v tom istom stĺpci.

Úloha 2.3.10. Dvanásť študentov sa pripravuje na štátnice a chcú sa rozdeliť na tri skupiny: Dvaja vypracujú otázky z kombinatoriky, piati vypracujú otázky z matematickej analýzy, piati vypracujú otázky z lineárnej algebry. Kolkými spôsobmi sa môžu rozdeliť?

Úloha 2.3.11. Kolkými spôsobmi je možné vybrať 11-členný futbalový tím a 5-členný basketbalový tím z 30-tich študentov, ak

- a) Nikto nebude v oboch tímoch.
- b) Lubovoľný počet študentov môže byť v oboch tímoch.
- c) Najviac jeden študent bude v oboch tímoch.

Úloha 2.3.12. Senát pozostáva zo 100 senátorov z 50-tich štátov, každý štát je reprezentovaný dvomi senátormi. Kolkými spôsobmi je možné zvoliť štvorčlenný výbor keď požadujeme, aby vo výbore neboli dvaja senátori z toho istého štátu?

Úloha 2.3.13. Chceme vybrať 6 členov disciplinárnej komisie spomedzi štyroch študentov a ôsmich učiteľov. Kolkými spôsobmi sa to dá urobiť, ak v komisii musia byť aspoň traja študenti?

Úloha 2.3.14. Máme štandardný balíček 52 kariet (t.j. $\{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K\} \times \{\clubsuit, \diamond, \spadesuit, \heartsuit\}$). Kolkými spôsobmi sa dá vybrať 10 kariet tak, aby sme všetky karty mali rôznej hodnoty. (T.j. nevyskytnú sa dve esá, dve dvojky, atď.)

Úloha 2.3.15. Desať študentov sedí v jednom rade. Pretože Harry a Hermiona neustále vyrušovali, nesmú sedieť vedľa seba. Kolkými spôsobmi sa vedia študenti usadiť?

Aký počet možností dostanem, ak mám troch študentov, z ktorých žiadni dvaja nesmú sedieť vedľa seba?

{principicvic:ULOBINOMN-

Úloha 2.3.16. Kombinatorickou úvahou dokážte:

$$\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1}.$$

(Návod: Pozerajte sa na podmnožiny vhodnej množiny, ktoré obsahuje tri zvolené prvky.)

Úloha 2.3.17. Kombinatorickou úvahou dokážte:

$$\binom{n}{2}m + \binom{m}{2}n = \binom{m+n}{3} - \binom{m}{3} - \binom{n}{3}.$$

(Hint: Môžete sa pozerať na výber trojčlennej komisie spomedzi m mužov a n žien.)

Úloha 2.3.18. Overte výpočtom aj kombinatorickou úvahou rovnosť:

$$\binom{2n}{n} = 2 \binom{2n-1}{n-1}.$$

Kapitola 3

Výber s opakovaním

3.1 Kombinácie a permutácie s opakovaním

Videli sme, že binomické koeficienty počítajú počet rôznych výberov (pri ktorých nezáleží na poradí) a vedeli sme tiež počítat počet usporiadaní k prvkov z nejakej n -prkovej množiny (t.j. situácia, kde sme brali ohľad aj na poradie).

Niekedy však môže nastať aj situácia, kedy môžeme niektorý prvok vybrať viackrát. (A opäť sa môže stať, že nám záleží alebo nezáleží na poradí.)

Príklady situácií, kedy sa môžeme na niečo takéto pozerat:

- Chceme objednať n kníh, pričom môžeme vyberať zo štyroch knižných titulov. Kolkými spôsobmi sa to dá urobiť?
- Počas týždňa chceme mať dvakrát konzultácie z matematickej analýzy, dvakrát z lineárnej algebry a raz z diskkrétnej matematiky – každý deň práve jedno z nich. Kolko rôznych rozvrhov na týždeň sa dá naplánovať.

Postupne si rozmyslíme, že úlohy takéhoto druhu vieme pomerne ľahko vyriešiť.

3.1.1 Permutácie s opakovaním

Definícia 3.1.1. Ak máme k dispozícií prvky k rôznych typov, pričom počty prvkov jednotlivých typov sú n_1, \dots, n_k a celkový počet je $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. O *permutáciach s opakovaním* hovoríme, ak sa pozeráme na všetky možné takéto usporiadania.

Čiže rozdiel oproti tomu, o čom sme hovorili pri permutáciach, je že teraz sa môže jeden prvok vyskytnúť viackrát.

Zoberme si príklad, ktorý sme už uviedli vyššie – na každý pracovný deň v týždni si chceme naplánovať práve jeden z predmetov matematická analýza, lineárna algebra, diskrétna matematika; pričom chceme mať analýzu aj lineárku dvakrát a diskrétku raz. T.j. zmysluplné usporiadania sú napríklad *DLLMM* alebo *MLMLD*.

Pomerne ľahko vieme prísť na to, aký je počet permutácií s opakovaním – niekedy sa pre tento počet používa aj označenie nazývané *multinomický koeficient*.

{opak:EQMULTKOEf}

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad (3.1)$$

Na to, že takýto počet sa skutočne rovná uvedenej hodnote môžeme prísť napríklad takouto úvahou: Pre n prvkov máme $n!$ možných usporiadaní, ak by sme sa pozerali na n_i

prvkov i -teho typu ako na rôzne prvky. Pretože však prvky i -teho typu nerozlišujeme $n_i!$ preusporiadaní týchto prvkov dáva to isté. Túto úvahu zopakujeme pre každý typ.

Keď sa opäť vrátíme k príkladu s predmetmi, tak pre každé usporiadanie prvkov M_1, M_2, L_1, L_2, D chceme $2!2!$ z nich stotožniť, pretože nerozlišujeme M_1 od M_2 a ani L_1 od L_2 . Napríklad všetky štyri usporiadania $DL_1L_2M_1M_2, DL_1L_2M_2M_1, DL_2L_1M_1M_2, DL_2L_1M_2M_1$ všetky zodpovedajú tomu $DLLMM$.

Skúsme sa ešte na ten istý problém pozrieť iným spôsobom. Máme n pozícií, na ktoré chceme poukladať naše prvky. Máme $\binom{n}{k_1}$ možností ako vybrať pozície pre prvky prvého typu. Zostalo nám $n - k_1$ pozícií, pre ne máme $\binom{n-k_1}{k_2}$ možností výberu pozícií. Dostaneme takto

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \dots \binom{n-k_1-\dots-k_{n-2}}{k_{n-1}} \binom{n-k_1-\dots-k_{n-2}-k_{n-1}}{k_n}.$$

Môžete sa presvedčiť o tom, že je to iba iné vyjadrenie toho istého čísla.

Príklad 3.1.2. Koľko rôznych reťazcov sa dá vytvoriť preusporiadaním písmen slova DETERMINANT? Koľko reťazcov takto dostaneme pomocou písmen slova MATEMATIKA?

V slove determinant máme jedenásť písmen, pričom je tam dvakrát D, dvakrát E, dvakrát N a ostatné iba raz. Dostaneme teda $\frac{11!}{2!2!2!} = \frac{11!}{8}$ rôznych reťazcov.

V slove matematika je desať písmen, pričom A sa opakuje trikrát, M aj T sú tam dvakrát a ostatné raz. Teda máme $\frac{10!}{3!2!2!}$ možností.

3.1.2 Kombinácie s opakovaním

Pozriem sa teraz na úlohu iného typu. Máme n -prvkovú množinu. Chceme vybrať k prvkov, pričom môžeme vybrať niektorý prvok viackrát a nezáleží nám na poradí. Budeme hovoriť o *kombináciách k -tej triedy z n prvkov s opakovaním*.

Príklad 3.1.3. Chceme dokúpiť do katedrovej knižnice tri knihy; hodia sa nám tituly A, B, C . (Pričom môžeme kúpiť aj viacero kusov tej istej knihy – napríklad môžeme vybrať $2 \times A$ a B .)

Naschvál sme vybrali veľmi malé čísla, aby to bol prípad, kde sme schopní vypísať aj všetky možnosti. Ale o chvíľu sa zamyslíme nad tým, ako takýto typ úlohy riešiť všeobecne.

Skúsme ich vypisovať nejako systematicky – vybrali sme niekoľko A -čko, niekoľko B -čok, niekoľko C -čok; tak ich vypisujeme v poradí, že najprv vypíšeme A -čka, potom B -čka, potom C -čka.

AAA
AAB
AAC
ABB
ABC
ACC
BBB
BBC
BCC
CCC

Dostali sme práve 10 možností. (Skúste sa presvedčiť o tom, že sme žiadnu možnosť nevynechali.)

Čo sa stane, ak by sme nevyberali tri knihy ale n kníh?

Vlastne chceme spočítať počet možností, koľkými spôsobmi môžeme zapísať taký reťazec, ako sme uviedli vyššie – máme na n pozíciách písmená A , B , C ; pričom píšeme najprv A -čka, potom B -čka, potom C -čka. Skúsme ich zapísať takým spôsobom, že medzi A -čka a B -čka aj medzi B -čka a C -čka pridáme oddeľovač (zarážku). Napríklad možnosti, ktoré sme vypísali vyššie pre $n = 3$ by sme zapísali ako:

$AAA||$
 $AA|B|$
 $AA||C$
 $A|BB|$
 $A|B|C$
 $A||CC$
 $|BBB|$
 $|BB|C$
 $|BC|C$
 $||CCC$

(Zvislú čiaru sme nakreslili vždy medzi všetky A -čka a všetky B -čka; pričom niektorých z nich môže byť nula. To isté pre B -čka a C -čka.)

Ak rátame pozície, na ktorých sú naše tri písmená a zarážky, tak máme celkovo 5 pozícií a 2 zarážky. Pritom každý výber pozícií na ktoré dáme zaáržky nám jednoznačne určuje reťazec, ktorý nás zaujíma. Napríklad z $\square|\square\square$ vieme vyčítať, že ide o $A|BB|$, t.j. máme jedenkrát A , 2-krát B a 0-krát C .

Všeobecne, keď máme vybrať n kníh, tak máme $n + 2$ pozícií a z nich máme vybrať dve pre zarážky; dostaneme teda $\binom{n+2}{2}$ možných výberov.

{opak: TVRKOMB}

Tvrdenie 3.1.4. *Počet kombinácií s opakovaním k -tej triedy z n prvkov je rovný*

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}.$$

Na tomto mieste sa možno oplatí spomenúť, že v literatúre sa môžete stretnúť aj s označením $\binom{n}{k}$.

Tiež si môžeme všimnúť, že s použitím známeho vzťahu pre binomické koeficienty vieme toto číslo prepísať ako

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} = \frac{n^{\overline{k}}}{k!},$$

čo je vyjadrenie, ktoré sa azda trochu podobá na $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$; rozdiel je ten, že tu berieme súčin k čísel začínajúcich od n a stúpajúcich.

Dôkaz. Rovnakou úvahou, ktorú sme spomenuli vyššie, vieme prísť na to, že máme medzi n pozícií pridať $k - 1$ oddeľovačov. Celkovo máme teda (pre prvky aj pre oddeľovače) $n + k - 1$ pozícií, vyberáme $k - 1$ pozícií na ktorých sú oddeľovače. Máme teda $\binom{n+k-1}{k-1}$ možností. Na základe symetrie (pozri (4.1) resp. úlohu 2.3.5) môžeme to isté kombinačné číslo prepísať aj ako $\binom{n+k-1}{n}$. \square

V angličtine sa často stretnete s názvom *stars and bars* – t.j. namiesto diagramu $\square|\square\square|$, ktorý sme uviedli vyššie, by sme ten istý výber znázornili ako $*|**|$.

Toto tvrdenie by sme vedeli dokázať aj indukciou – opäť tu máme niečo kde vystupujú dve premenné n a k , treba si rozumne vybrať ako nastaviť indukciu (poznámka 2.3.3).

Dôkaz. TODO dopísať poriadnejšie

TODO Vyberáme z $\{1, 2, \dots, n\}$ a rozdelíme podľa toho, či sa vo výbere vyskytne alebo nevyskytne jednotka.

$$K'(n, k) = K'(n-1, k) + K'(n, k-1)$$

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-2}{k-2}$$

□

Cvičenia

Úloha 3.1.1. Ukážte, že pre n_1, \dots, n_k také, že $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ platí

$$\binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \dots \binom{n-k_1-\dots-k_{n-2}}{k_{n-1}} \binom{n-k_1-\dots-k_{n-2}-k_{n-1}}{k_n} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

Úloha 3.1.2. Koľko rôznych reťazcov sa dá vytvoriť permutovaním písmen slova HALA-BALA?

Úloha 3.1.3. Koľko 7-ciferných čísel sa dá vytvoriť pomocou čífer 1, 2, 3, ak každá z nich musí byť použitá aspoň dvakrát?

Úloha 3.1.4. Zdôvodnite, že pre každé $k \in \mathbb{N}_0$ je $\frac{(3k)!}{6^k}$ celé číslo, t.j. $6^k \mid (3k)!$.

3.2 Počet celočíselných riešení $x_1 + \dots + x_k = n$

Pozrime sa ešte na iný typ úlohy, ktorý úzko súvisí s kombináciami s opakovaním.

Tvrdenie 3.2.1. Pre dané $k, n \in \mathbb{N}_0$ je počet riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

takých, že $x_i \in \mathbb{Z}$ a $x_i \geq 0$, je rovný

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

Dôkaz. TODO tvrdenie 3.1.4

□

Skúsme nejaký malý príklad, kde by sme mali zvládnuť vypísať aj všetky možnosti.

Príklad 3.2.2. Koľko je celočíselných riešení $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ takých, že $x_{1,2,3} \geq 0$?

Podľa uvedenej vety by ich malo byť $\binom{5}{2} = 21$. Ak ich skúsime nejakým spôsobom systematicky vypisovať, tak skutočne dostaneme práve 21 možností.

0 + 0 + 5	1 + 1 + 3	2 + 3 + 0
0 + 1 + 4	1 + 2 + 2	3 + 0 + 2
0 + 2 + 3	1 + 3 + 1	3 + 1 + 1
0 + 3 + 2	1 + 4 + 0	3 + 0 + 2
0 + 4 + 1	2 + 0 + 3	4 + 0 + 1
0 + 5 + 0	2 + 1 + 2	4 + 1 + 0
1 + 0 + 4	2 + 2 + 1	5 + 0 + 0

{celocries:SECT}

{celocries:TVRPOCET}

{celocries:PRIKL}

Chceli by sme sa pozrieť na riešenia úloh podobného typu, kde sa vyskytnú aj iné obmedzenia ako $x_i \geq 0$. Prínajmenšom pomerne prirodzene vyzerá napríklad niečo také, že by sme chceli $x_i \geq 1$ (t.j. nie riešenia v nezáporných celých číslach, ale v kladných celých číslach).

Takýto typ úlohy však vieme ľahko transformovať na úlohu, pre ktorú poznáme odpoveď z tvrdenia 3.2.1.

{celocries:PRIKLPOSUN}

Príklad 3.2.3. Koľko je celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

takých, že $x_{1,2} \geq 1$ a $x_{3,4} \geq 2$?

Stačí nám zaviesť nové premenné $y_1 = x_1 - 1$, $y_2 = x_2 - 1$, $y_3 = x_3 - 2$, $y_4 = x_4 - 2$. Pôvodné obmedzenia zodpovedajú tomu, že teraz hľadáme celočíselné hodnoty také, že $y_i \geq 0$, dostali sme však novú rovnicu

$$\begin{aligned} (x_1 - 2) + (x_2 - 2) + (x_3 - 1) + (x_4 - 1) &= 6 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &= 6 \end{aligned}$$

Podľa tvrdenia 3.2.1 je takýchto štvoric presne $\binom{9}{3}$.

Tou istou úvahou dostaneme z tvrdenia 3.2.1:

{celocries:DOSPOCET}

Dôsledok 3.2.4. Pre dané $k, n \in \mathbb{N}_0$ je počet riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

takých, že $x_i \in \mathbb{Z}$ a $x_i \geq 1$ rovný presne

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Môžeme sa pozrieť aj na iné odvodenie dôsledku 3.2.4. (Ktoré nevyužíva predchádzajúce tvrdenie; takže by sme mohli postupovať aj obrátene – najprv dokázať nasledujúcim spôsobom tento výsledok a z neho ako dôsledok dostať 3.2.1.)

Dôkaz. Pre ľubovoľnú k -ticu (x_1, x_2, \dots, x_k) vyhovujúcu daným podmienkam si označme $y_j = x_1 + x_2 + \dots + x_j$ pre $j = 1, 2, \dots, k-1$. (Ak by sme analogicky definovali aj y_k , tak dostaneme $y_k = n$.)

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_1 + x_2 \\ y_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ &\vdots \\ y_{k-1} &= x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{k-1} \end{aligned}$$

Všimnime si, že každá voľba x_1, \dots, x_k nám dáva $k-1$ prvkov takých, že $1 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_{k-1} < n$, a teda určuje nejakú $(k-1)$ -prvkovú podmnožinu

$$\{y_1, y_2, \dots, y_{k-1}\} \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Aj obrátene, každú $(k-1)$ -prvkovú podmnožinu $A \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}$ vieme práve jedným spôsobom usporiadať vzostupne.

$$A = \{y_1 < y_2 < \dots < y_{k-1}\}.$$

Teda každá takáto podmnožina jednoznačne určuje rastúcu postupnosť čísel y_1, y_2, \dots, y_k . Potom x_1, x_2, \dots, x_k vyhovujúce vyššie uvedeným vzťahom sú jednoznačne určené ako

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_2 - y_1 \\ x_3 &= y_3 - y_2 \\ &\vdots \\ x_{k-1} &= y_{k-1} - y_{k-2} \\ x_k &= n - y_{k-1} \end{aligned}$$

Alebo stručnejšie: $x_i = y_i - y_{i-1}$, ak dodefinujeme $y_0 = 0$ a $y_k = n$.

Teda máme jednoznačné priradenie medzi riešeniami uvedenej rovnice v kladných celých číslach a $(k-1)$ -prvkovými podmnožinami množiny $\{1, 2, \dots, n-1\}$. \square

Neskôr sa vrátíme k tomu istému typu úlohy, keď nám navyše pribudnú okrem dolných ohraničení aj horné ohraničenia.

Už sme používali na odvodenie rôznych identít pre binomické koeficienty fakt, že vyjadrujú počet k -prvkových podmnožín n -prvkovej množiny. Ak máme iné interpretácie pre $\binom{n}{k}$ – ako napríklad počet celočíselných riešení alebo počet výberov s opakovaním, tak môžeme použiť aj tie.

Môžeme sa zamyslieť nad tým, čo sa stane, ak rozdelíme nezáporné celočíselné riešenia

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

podľa hodnoty x_k .

Je jasné, že x_k môže nadobúdať iba hodnoty od 0 po n . Ak si zafixujeme konkrétnu hodnotu $x_k = j$, tak riešenie môžeme doplniť toľkými spôsobmi, koľko máme (pri daných obmedzeniach) riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} = n - j.$$

Ak vyjadríme počty riešení na základe tvrdenia 3.2.1, tak dostaneme:

$$\begin{aligned} \binom{n+k-1}{k-1} &= \sum_{j=0}^n \binom{n+k-2-j}{k-2}, \\ \binom{n+k-1}{k-1} &= \sum_{i=k-2}^{n+k-2} \binom{i}{k-2}, \end{aligned}$$

čo pri substitúcii $l = k-2$ a $m = n+k-2$ dáva

$$\binom{m+l+1}{l+1} = \sum_{i=l}^m \binom{i}{l}.$$

Vidíme, že sme dostali iné odvodenie hokejkovej identity (2.4).

Mohli by sme postupovať aj obrátene – ak sme už hokejkovú identitu odvodili iným spôsobom, mohli by sme ju použiť na induktívny dôkaz tvrdenia 3.2.1 (úloha 3.2.1). Aj keď dôkaz, ktorý sme uviedli vyššie – na základe toho, že ide vlastne o počet kombinácií s opakovaním – je určite jasnejší a priamočiarejší.

Cvičenia

{celocriescvi

Úloha 3.2.1. Dokážte tvrdenie 3.2.1 matematickou indukciou pomocou hokejkovej identity (2.4)

Úloha 3.2.2. Koľko je celočíselných riešení rovnice $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 31$ takých, že $x_i \geq i$ pre $i = 1, 2, \dots, 5$.

Úloha 3.2.3. Koľko existuje celočíselných riešení rovnice $2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 12$ takých, že $x_i \in \mathbb{N}_0$? (Hint: Môže pomôcť zamyslieť sa nad paritou čísel x_3 a x_4 .)

{ULOVYBERNESUSEDNE}

Úloha 3.2.4. Ukážte, že počet možností ako vybrať k -prvkovú podmnožinu z $\{1, 2, \dots, n\}$ tak, že nebude obsahovať susedné čísla, je práve $\binom{n-k+1}{k}$. (Hint 1: Chceme vlastne čísla a_1, \dots, a_k také, že $a_1 < a_2 - 1$, $a_2 < a_3 - 1$, atď. Hint 2: Dá sa úloha previesť nejakou vhodne na počítanie riešení $x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} = n$ s nejakými vhodnými obmedzeniami? Hint 3: Ak máte nápad na nejaké celkom iné riešenie, nedajte sa pomýliť možnosťami naznačenými v predošlých dvoch hintoch.)

Kapitola 4

Binomické koeficienty

4.1 Definícia binomického koeficientu

{defbinom:DEF}

Definícia 4.1.1. Pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{Z}$ definujeme *binomický koeficient* $\binom{n}{k}$ ako počet všetkých k -prvkových podmnožín množiny n .

Pre binomické koeficienty sa bežne používa aj názov *kombinačné číslo*.

Môžeme si všimnúť, že pre $k > n$ dostaneme $\binom{n}{k} = 0$. (Nemôžeme mať podmnožinu n -prvkovej množiny, ktorá má viac než n prvkov.)

Takisto pre $k < 0$ máme $\binom{n}{k} = 0$; tento prípad sme v definícii pripustili hlavne preto, že nám to zjednoduší formulácie niektorých tvrdení a niektorých dôkazov.

Už sme ukázali v (2.1), že pre $0 \leq k \leq n$ platí:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Resp. ak ten istý vzťah prepíšeme v tvare

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

tak v takejto podobe platí aj pre $k > n$. (Všimnime si, že v čitateli sa ako jeden z činiteľov vyskytne nula.)

{defbinom:POZNREALS}

Poznámka 4.1.2. Môžeme si všimnúť, že aj pre reálne číslo n by výraz $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$. Aj keď by sme pravdepodobne použili iné označenie; keďže písmeno n obvykle používame pre premennú, ktorá nadobúda prirodzené alebo aspoň celočíselné hodnoty. T.j. pozerali by sme sa na polynóm

$$\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}.$$

Na tomto mieste sa takémuto zovšeobecneniu nebudeme venovať, stručne o ňom niečo povieme v časti 4.7.

Medzi základné vlastnosti patrí Pascalova identita (2.2), t.j.

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Už sme videli, ako na základe tejto rovnosti môžeme rekurzívne z hodnôt $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ v Pascalovom trojuholníku vyplniť ďalšie hodnoty.

Pomerne ľahko vieme overiť, že Pascalov trojuholník je symetricky (úloha 2.3.5):

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (4.1) \quad \{\text{defbinom:EQS}\}$$

4.2 Binomická veta

Chceme sa pozrieť na to, ako vyzerá výraz $(1+t)^n$ pre rôzne hodnoty exponentu $n \in \mathbb{N}_0$. Roznásobením môžeme skontrolovať, ako to vyzerá pre niekoľko prvých hodnôt.

$$\begin{aligned} (1+t)^0 &= 1 \\ (1+t)^1 &= 1+t \\ (1+t)^2 &= 1+2t+t^2 \\ (1+t)^3 &= 1+3t+3t^2+t^3 \\ (1+t)^4 &= 1+4t+6t^2+4t^3+t^4 \\ (1+t)^5 &= 1+5t+10t^2+10t^3+5t^4+t^5 \\ (1+t)^6 &= 1+6t+15t^2+20t^3+15t^4+6t^5+t^6 \end{aligned}$$

Aj v prípade, že by sme sa binomickou vetou doteraz nestretli, na tomto mieste určite každý zbadá, že rovnaké čísla sme videli v Pascalovom trojuholníku.

O tom, že skutočne dostaneme také polynómy, ako sme vypísali vyššie, sa dá presvedčiť roznásobením.

`{binvt:VTBINOM}`

Veta 4.2.1 (Binomická veta). *Pre ľubovoľné $t \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}_0$ platí*

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k. \quad (4.2) \quad \{\text{binvt:EQBIN1}\}$$

Pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \quad (4.3) \quad \{\text{binvt:EQBIN2}\}$$

Evidentne (4.2) je špeciálny prípad (4.3). Ale aj obrátene, ak platí (4.2), tak po dosadení $t = \frac{y}{x}$ dostaneme

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^k}{y^k}.$$

Ak obe strany vynásobíme y^n , tak už máme

$$(y+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Tento postup je legitímny pre $y \neq 0$. Ľahko však vidíme, že (4.3) platí aj v prípade $y = 0$.

Ak teda chceme dokázať vetu 4.2.1, stačí dokázať niektorú z dvoch rovností (4.2) a (4.3). Z ktorejkoľvek z nich už pomerne ľahko odvodíme tú druhú.

Môžeme sa na to pozrieť kombinatoricky.

Dôkaz. Pri roznásobovaní výrazu

$$(1+t)^n = \underbrace{(1+t)(1+t)\cdots(1+t)}_{n\text{-krát}}$$

z každej zátvorky vyberieme 1 alebo t .

Ak chceme dostať t^k , tak musíme práve z k zátvoriek vybrať premennú t a z ostatných jednotku. Máme práve $\binom{n}{k}$ možností, ako vybrať týchto k zátvoriek. \square

Ak by sa vám predošlý argument zdal príliš neformálny, tak to isté vieme dokázať aj indukciou vzhľadom na n .

Dôkaz. 1° Lahko skontrolujeme, že tvrdenie binomickej vety platí pre $n = 0$, $n = 1$.

2° Úpravou výrazu $(1+t)^{n+1}$ dostaneme

$$\begin{aligned} (1+t)^{n+1} &= (1+t)(1+t)^n \\ &= (1+t) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k + t \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} t^k \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} t^k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} t^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) t^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} t^k \end{aligned}$$

V rovnosti označenej ako (*) sme pridali dva nulové členy obsahujúce $\binom{n}{n+1}$ a $\binom{n}{-1}$. \square

Poznámka 4.2.2. Pri súvise umocňovania a počtu zobrazení medzi dvoma množinami sme spomenuli rovnosť $0^0 = 1$; pozri poznámku 2.1.9. Práve binomická veta je príkladom situácie, kedy sa nám takéto niečo hodí. Pozrime sa na binomickú vetu v tvare

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k$$

pre prípad $t = 0$. V takomto na pravej strane je sčítanec pre $k = 0$ rovný $\binom{n}{0} 0^0 = 1 \cdot 1 = 0$ a všetky ostatné sčítance sú nulové (keďže $0^k = 0$ pre $k > 1$). Teda naozaj dostávame rovnosť $1 = 1$ a binomická veta funguje aj v takomto prípade. (Podobne si môžete rozmyslieť, čo sa stane s rozvojom $(x+y)^n$ v prípade, že $y = 0$.)

Ak by sme chceli byť opatrní a povedali by sme si, že hodnotu 0^0 radšej nedefinujeme; tak pri formulácii a aj pri používaní binomickej vety by sme si museli dávať pozor na nulový prípad.

Poznámka 4.2.3. Keď sme dokázali binomickú vetu pre komplexné čísla, je azda vcelku prirodzená otázka, či analogická veta platí aj v iných situáciách – napríklad pre matice, polia, okruhy. Na tomto mieste necháme iba kryptickú poznámku, že odpoveď na niektoré z týchto otázok môže byť nie, na niektoré áno za vhodných dodatočných podmienok (a správnej interpretácie binomickej vety). A necháme na zvedavého čitateľa, aby sa nad takýmito vecami zamyslel samostatne. (Pričom je veľmi pravdepodobné, že s binomickou vetou ste sa už stretli aspoň pre niektoré z týchto situácií.) Pozri úlohy 4.2.1, 4.2.2 a 4.2.3.

Binomická veta je užitočná a zaujímavá sama o sebe. Ale vieme ju použiť aj na dôkaz niektorých identít týkajúcich sa binomických koeficientov.

Napríklad ak do (4.2) dosadíme $t = 1$, tak dostaneme

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Toto je presne vzťah pre súčet binomických koeficientov v riadku Pascalovho trojuholníka, ktorý sme už predtým odvodili vo vete 2.3.1.

Čo sa stane, ak do binomickej vety dosadíme $t = -1$.

{binvt:DOSPARNE}

Dôsledok 4.2.4. Pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}_0$ také, že $n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

A teda platia aj rovnosti

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} = 2^{n-1}.$$

Zistili sme teda, že počet podmnožín n -prvkovej množiny, ktoré majú párny počet prvkov, je rovnaký, ako počet podmnožín s nepárnym počtom prvkov. Takto sformulované to znie ako výrok o počítaní množín – takže sa zdá byť prirodzené pýtať sa na to, či by sme nevedeli vymyslieť aj nejaký kombinatorický argument prečo sa tieto počty rovnajú (úloha 4.2.4).

Poznamenajme, že sumy uvedené v dôsledku 4.2.4 by sme mohli zapísať aj ako

$$\sum_{0 \leq 2j \leq n} \binom{n}{2j} = \sum_{0 \leq 2j+1 \leq n} \binom{n}{2j+1}.$$

Alebo vďaka našej konvencii, že $\binom{n}{k} = 0$ pre $k = n$, by sme sa vlastne nemuseli starať o hranice sumy a zapísať ich ako

$$\sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{2j} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{2j+1} = 2^{n-1},$$

pričom tento zápis síce formálne vyzerá ako nekonečný súčet, od istého miesta však už máme iba nuly, a teda v skutočnosti sčítujeme iba konečne veľa členov.

Odvodenie pre súčet párnych členov môžeme naznačiť aj takto:

$$\begin{array}{r} (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{2k} + \binom{n}{2k+1} + \cdots \\ (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{2k} - \binom{n}{2k+1} + \cdots \\ \hline 2^n = 2 \binom{n}{0} + 2 \binom{n}{2} + \cdots + 2 \binom{n}{2k} + \cdots \end{array}$$

Vedeli sme teda dostať súčet všetky čísel na párnych pozíciách v riadku Pascalovho trojuholníka. Dali by sa nejako aspoň trochu rozumne vyjadriť aj súčty, kde vezmeme každý tretí alebo každý štvrtý binomický koeficient?

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{3k} = ?$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{4k} = ?$$

Môžete sa skúsiť nad týmito otázkami zamyslieť – v úlohách 4.2.5, 4.2.6 nájdete nejakú možnosť, ako sa dajú vyjadriť prave strany a súčasne aj návod na odvodenie. (Aj keď nejaký dosť silný hint nám dáva už to, v akej kapitole sa táto otázka vyskytla a akým spôsobom sme vedeli odvodiť súčet pre párne členy.)

S funkciou $f(t) = (1+t)^n$ môžeme robiť aj iné operácie.

$$f'(t) = n(1+t)^{n-1}$$

Súčasne vieme zderivovať aj jednotlivé sčítance v sume $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k$ a dostaneme

$$f'(t) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} t^{k-1}.$$

Ak dosadíme do $f'(t)$ hodnotu $t = 1$, tak dostávame

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}. \quad (4.4) \quad \{\text{binvt:EQSUMKBINOMNK}\}$$

Aj pri tejto sume sa môžeme pozrieť na to, či ju vieme odvodiť iným spôsobom. (Napríklad kombinatoricky alebo použitím iných identít, ktoré poznáme pre binomické koeficienty.) Nejaké možné prístupy k odvodeniu tejto identity sú naznačené v úlohách 4.2.7 a 4.4.1.

Samozrejme, mohli by sme tento postup opakovať – skúsiť čo dostaneme pre druhú deriváciu, tretiu deriváciu a podobne. Niektoré úlohy, kde sa takéto veci dajú použiť, nájdete v cvičeniach či už za touto časťou alebo medzi cvičeniami v časti 4.4 venovanej sumám s binomickými koeficientami.

Môžeme skúsiť ten istý vzťah aj zintegrovať.

$$f(t) = (1+t)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k$$

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} x^{k+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

Samozrejme, aj tu by sme mohli takéto postup opakovať viackrát. Ako obvykle, aj tu sa môžeme pýtať na to, či vieme odvodiť ten istý vzťah aj inými spôsobmi (matematickou indukciou, kombinatoricky, použitím iných identít). Jeden možný postup je naznačený v úlohe 4.4.5.

Vyskúšali sme do identity z binomickej vety dosadzovať rôzne hodnoty, zderivovať alebo zintegrovať ju. Samozrejme, môžeme s funkciou $f(t) = (1+t)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k$ robiť aj rôzne iné veci. Niektoré sa vyskytnú ako cvičenia, spomeňme na tomto mieste napríklad aj dôkaz identity (4.8).

Cvičenia

{binvtcvi:ULO

Úloha 4.2.1. Nech A, B sú štvorcové matice rovnakej veľkosti a nad tým istým poľom.

a) Platí pre matice binomická veta v tvare

$$(I + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k,$$

pričom (ako obvykle) berieme $B^0 = I$?

b) Platí pre matice aj takáto podoba binomickej vety?

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

c) Vedeli by ste prísť aspoň na nejaké postačujúce podmienky, kedy pre matice funguje binomická veta?

{binvtcvi:ULOPOLE}

Úloha 4.2.2. Nech F je pole a $a, b \in F$. Pre $n \in \mathbb{N}_0$ a $a \in F$ interpretujeme $n \times a$ prirodzeným spôsobom ako

$$n \times a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{-krát}}$$

Dokážte, že potom platí binomická veta v takomto tvare:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times a^k b^{n-k}.$$

{binvtcvi:ULOOKRUH}

Úloha 4.2.3. Nech R je okruh a $a, b \in R$. Platí v takejto situácii binomická veta v takejto podobe? Ak nie platí aspoň pre prípad, že $ab = ba$? (T.j. napríklad v komutatívnych okruhoch. Alebo aj v nekomutatívnom okruhu, ak a a b sú nejaké prvky, ktoré komutujú.)

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times a^k b^{n-k}$$

{binvtcvi:ULOPARNE}

Úloha 4.2.4. Vedeli by ste kombinatorickou úvahou zdôvodniť, že počet podmnožín n -prvkovej množiny, ktoré majú párny počet prvkov, je taký istý, ako počet podmnožín s nepárnym počtom prvkov? Viete napríklad dostať nejakú bijekciu medzi množinou všetkých párných podmnožín a množinou všetkých nepárných podmnožín?

{binvtcvi:ULOSUM4K}

Úloha 4.2.5. Čo sa stane, ak do binomickej vety dosadíme $t = \pm i$? Vedeli by ste na základe toho odvodiť identitu, ak sčítujeme v riadku Pascalovho trojuholníka každý štvrtý binomický koeficient?

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{4k} = \frac{2^n + (1+i)^n + (1-i)^n}{4} = \frac{2^{n-1} + 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}}{2}$$

{binvtcvi:ULOSUM3K}

Úloha 4.2.6. Označme $\omega = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = e^{2\pi i/3}$, t.j. komplexné riešenie rovnice $x^3 = 1$. Ukážte, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{3k} = \frac{2^n + (1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n}{3} = \frac{2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3}}{3}$$

BINOMNKAUSS}

Úloha 4.2.7. Vedeli by ste fakt, že výrazy

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n (n-k) \binom{n}{n-k}$$

predstavujú tú istú sumu použiť na odvodenie rovnosti $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$?

{ULOSUMKBINOMNKPRIEMER}

Úloha 4.2.8. Rovnosť z predošlej úlohy sa dá ekvivalentne prepísať ako

$$\frac{\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}}{2^n} = \frac{n}{2}$$

a v takejto podobe ju môžeme interpretovať ako: Priemerná veľkosť podmnožiny $\{1, 2, \dots, n\}$ je $\frac{n}{2}$. Dá sa aj takýto pohľad použiť na dôkaz tejto rovnosti? (Aj keď sa dá povedať, že to je skoro veľmi podobné na argument naznačený v predošlej úlohe.)

Úloha 4.2.9. [L2, 5.1.2], [L1, 5.1.2]: Zistite čomu sa rovná $\sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n \binom{n}{i} \binom{i}{j}$ (a nájdite nejaké zdôvodnenie).

4.3 Vlastnosti binomických koeficientov

{vlastnosti:SECT}

Skúsme sa pozrieť na niektoré jednoduché vlastnosti binomických koeficientov.

Napríklad pomerne ľahko by sme mali byť schopní zdôvodniť, že pre $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}. \quad (4.5) \quad \{\text{vlastnosti:EQFRACBINOM}\}$$

Pre nenulové k túto rovnosť môžeme túto rovnosť ekvivalentne prepísať aj takto:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \quad (4.6) \quad \{\text{vlastnosti:EQFRACBINOM2}\}$$

Zdôvodnenie týchto rovností by malo byť pomerne jednoduché – mohli by sme napríklad na oboch stranách zobrať vyjadrenie pomocou faktoriálov a trochu upravovať. Poďme sa pozrieť na nejaký kombinatorický argument.

Dôkaz rovnosti (4.5). Predpokladajme, že máme n ľudí, z ktorých chceme vybrať k -člennú komisiu a súčasne v tejto komisii chceme vybrať predsedu. (Všetci ostatní členovia komisie sú úplne rovnocenní.) Kolkými spôsobmi sa to dá urobiť?

Jeden možný pohľad je ten, že vybrali k členov komisie, na to máme $\binom{n}{k}$ možností. A potom sme vybrali predsedu, ktorý musí byť jedným z členov komisie. Teda tu máme práve k možností. Celkovo dostávame $k \binom{n}{k}$ spôsobov ako vybrať komisiu aj s predsedom.

Môžeme počítať aj inak: Najprv vyberieme predsedu, na to máme n možností. Potom ešte treba vybrať ostatných $k-1$ členov komisie, tých už vyberáme spomedzi zvyšných $n-1$ ľudí, ktorých máme k dispozícii. Teda dostaneme, že máme $n \binom{n-1}{k-1}$ rôznych výberov.

Pretože obe čísla vyjadrujú počet prvkov tej istej množiny, musia sa rovnať:

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

□

Rovnosť (4.5) môžeme zovšeobecniť na nasledujúcu identitu:

$$\binom{n}{k} \binom{k}{l} = \binom{n}{l} \binom{n-l}{k-l}. \quad (4.7) \quad \{\text{vlastnosti: E}\}$$

Dôkaz ponecháme ako cvičenie (úloha 4.3.4).

Poznámka 4.3.1. Samozrejme, tú istú vec by sme vedeli vyjadriť aj veľa inými spôsobmi; nie iba cez výber komisie.

Mohli by sme si napríklad zobrať nejakú n -prvkovú množinu M a počítať koľko je prvkov množine

$$\{(x, A); x \in A, A \subseteq M, |A| = k\}.$$

Alebo ak by sme chceli niečo, čo sa viac podobá na príklad z reálneho života a ľahšie sa predstavuje, tak by sme mohli vyberať skoro hocikaké objekty – v tejto konkrétnej úlohe ešte potrebujeme, aby jeden z nich mal špecifickú úlohu. (Vytiahneme si k kariet z balíčka a ešte potom vyberieme jednu, ktorá bude na toto kolo tromfom. Spomedzi nejakých receptov vyberáme k jedál, ktoré sa budú dnes v našej reštaurácii ponúkať; pričom jedno z nich bude ako extra menu. Z ponuky rôznych tém vyberieme k prednášok, ktoré budú ponúkané na dni otvorených dverí; a ešte vyberieme jednu, ktorá bude vo veľkej posluchárni pre všetkých účastníkov. Dá sa vymyslieť veľa ďalších situácií, ktoré by sa dali použiť – fantázii sa medze nekladú.)

Keďže sa takým spôsobom dajú interpretovať viaceré kombinatorické identity, tak sa počítanie komisií v kombinatorike dosť často vyskytuje. (Určite na to narazíte, ak otvoríte nejaké knihy venované podobným téma alebo jednoducho skúsíte na internete vyhľadávať nejakú kľúčové slová súvisiace s binomickými koeficientami a skúsíte pridať aj komisie.) Takže aj tu sme použili takúto interpretáciu – a ešte sa s ňou stretne aj inde.

V Pascalovom trojuholníku môžeme ľahko vypožorovať, že jeho prvky najprv rastú a potom klesajú, t.j. pre celé čísla také, že $0 \leq k \leq n$ platí:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &< \binom{n}{k+1} && \text{ak } 2k+1 < n \\ \binom{n}{k} &> \binom{n}{k+1} && \text{ak } 2k+1 > n \end{aligned}$$

Pokúste sa nájsť nejaký dôkaz, že tieto nerovnosti skutočne platia – úloha 4.3.1.

V závislosti od parity teda ako najväčší prvok v riadku Pascalovho trojuholníka máme prvok, ktorý je v strede, t.j. binomický koeficient tvaru $\binom{2n}{n}$; alebo sú v strede dva rovnaké prvky $\binom{2n+1}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$.

Cvičenia

Úloha 4.3.1. Nech $n \in \mathbb{N}_0$. Zistite, pre ktoré $k \in \mathbb{Z}$ platí nerovnosť $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$ a pre ktoré k platí obrátená nerovnosť.

Úloha 4.3.2. Ukážte, že pre $n, k \in \mathbb{Z}$ také, že $0 \leq k \leq n$ platí $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}$. Dá sa táto rovnosť použiť na riešenie úlohy 4.3.1?

Úloha 4.3.3. Ukážte, že pre $n, k \in \mathbb{Z}$ také, že $0 \leq k \leq n$ platí $\binom{n+1}{k} > \binom{n}{k}$.

Úloha 4.3.4. Dokážte, že pre $n, k, l \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\binom{n}{k} \binom{k}{l} = \binom{n}{l} \binom{n-l}{k-l}.$$

Úloha 4.3.5. [BQ, Identity 154] Ukážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3\binom{n}{4} + 3\binom{n}{3}.$$

(Pokúste sa nájsť aj kombinatorický argument, nie iba zdôvodnenie pomocou výpočtu.)

Úloha 4.3.6. Ukážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí $2\binom{n}{2} + n^2 = \binom{2n}{2}$.

Dalo by sa nájsť nejaké zovšeobecnenie tejto rovnosti, ktoré dáva vyjadrenie pre $\binom{n+k}{2}$?

{ULOSUM1331}

Úloha 4.3.7. Vedeli by ste nejakým zjednodušiť výraz $\binom{n}{k} + 3\binom{n}{k-1} + 3\binom{n}{k-2} + \binom{n}{k-3}$?

4.4 Sumy s binomickými koeficientami

{vlastnosti:SECTSUM}

4.4.1 Vandermondova identita

Tvrdenie 4.4.1. Pre ľubovoľné $m, n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\sum_{j=0}^s \binom{m}{j} \binom{n}{s-j} = \binom{m+n}{s}. \quad (4.8) \quad \{\text{binom:EQVANDERMONDE}\}$$

Dôkaz. TODO Máme m ľudí z matematickej sekcie a n ľudí z informatickej sekcie; počítame koľkými spôsobmi môžeme zostaviť komisiu, ktorá má s členov. \square

Dôkaz. TODO

$$(1+t)^{m+n} = (1+t)^m(1+t)^n$$

$$\sum_{s=0}^{m+n} \binom{m+n}{s} t^s = \left(\sum_{j=0}^m \binom{n}{j} t^j \right) \left(\sum_{k=0}^n \binom{m}{k} t^k \right)$$

\square

4.4.2 Niektoré ďalšie sumy

Cvičenia

{ULOSUMKBINOMNKKOMB}

Úloha 4.4.1. Vedeli by ste nájsť nejakú kombinatorickú interpretáciu, ktorou sa dá odvodiť nasledujúca rovnosť? Alebo by ste ju vedeli s použitím niektorej identity z tejto časti previesť na inú známú sumu?

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

{ULOSUMKBINOMNKPARNÉ}

Úloha 4.4.2. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí:

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ je párne}}} k \binom{n}{k} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ je nepárne}}} k \binom{n}{k} = n2^{n-2}$$

{binomsumcvic:ULOSUMK^2B}

Úloha 4.4.3. Dokážte rovnosť

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

{binomsumcvi

Úloha 4.4.4. Dokážte rovnosť

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$

binomsumcvi:ULOSUMFRAC}

Úloha 4.4.5. Dá sa výraz $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$ upraviť nejakým spôsobom, ktorý by nám pomohol pri vyjadrení sumy $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$?

omsumcvi:ULOSUMSTVORCE}

Úloha 4.4.6. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Úloha 4.4.7. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}.$$

Úloha 4.4.8. [BQ, Identity 155] Nech $n, m \in \mathbb{N}_0$ a $0 \leq m \leq n$. Dokážte, že

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}.$$

Úloha 4.4.9. [BQ, Identity 158] Nech $n, m \in \mathbb{N}_0$ a $0 \leq m \leq n$. Dokážte, že

$$\sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} = 2^m \binom{n}{m}.$$

4.5 Prechádzky po mriežke

{mriezka:SECT}

Podme sa pozrieť ešte na jeden problém, ktorý možno vyjadriť pomocou binomických koeficientov.

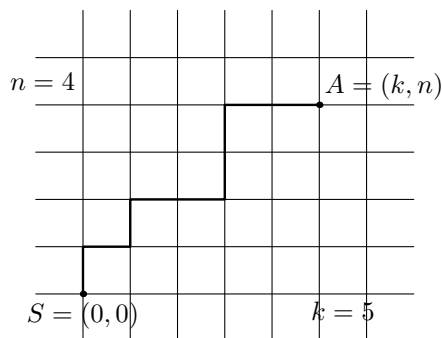
Predpokladajme, že máme štvorcovú mriežku (alebo inak, že sa pozeráme na body v rovine s celočíselnými súradnicami). Chceme sa dostať z bodu $(0, 0)$ do bodu (k, n) pričom v každom kroku máme povolené ísť buď doprava alebo nahor (na východ alebo na sever). Inak to môžeme sformulovať tak, že sa môžeme pohybovať iba po hranách mriežky a chceme ísť čo najkratšou cestou. Príklad povolenej cesty je na obrázku 4.1. Vedeli by sme spočítať koľko existuje takýchto ciest?

Tvrdenie 4.5.1. Počet ciest po mriežke z bodu $(0, 0)$ do (k, n) takých, že v každom kroku sa posunieme doprava alebo nahor (t.j. každý krok je tvaru $(i, j) \rightarrow (i+1, j)$ alebo $(i, j) \rightarrow (i, j+1)$) je rovný

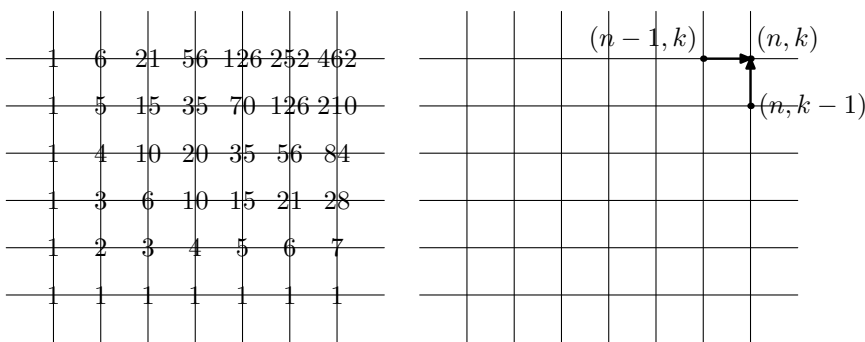
$$\binom{n+k}{k} = \binom{n+k}{n}$$

Dôkaz. TODO Cesta má $n+k$ krokov, pričom máme vybrať k pozícií, na ktoré dáme \rightarrow (a na ostatných n pozíciách bude \uparrow) □

TODO aj z obrázku (resp. indukciou) – obrázok 4.2



Obr. 4.1: Príklad cesty v mriežke



Obr. 4.2: Súvis mriežky a Pascalovho trojuholníka

4.6 Nerovnosti a asymptotické vlastnosti

4.6.1 Faktoriál

Stirlingova formula

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{4.9}$$

Symbol \sim používame v takom význame ako ste zvyknutý z analýzy. T.j. pre postupnosti aj pre funkcie to hovorí o tom, že podiel sa limitne blíži k jednotke.

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$a_n \sim b_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Teda uvedené tvrdenie vlastne hovorí, že:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1. \tag{4.10}$$

Toto tvrdenie na tomto mieste uvádzame bez dôkazu – je ho však rozumné spomenúť, pretože je to veľmi známy výsledok o faktoriáloch.

4.7 Binomická veta s reálnym exponentom

{realexp:SECT}

Pri vyjadrení binomického koeficientu sme dostali výraz

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Výraz na pravej strane rovnosti by mal význam aj pokiaľ n je reálne alebo dokonca komplexné číslo. (Takéto niečo sme už spomenuli v poznámke 4.1.2.) Aspoň nejaké veci si o takomto zovšeobecnení povieme, tak zdefinujme všeobecne:

{realexp:DEFBINOM}

Definícia 4.7.1. Pre $t \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{N}_0$ označme

$$\binom{t}{k} = \frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)}{k!}$$

V tejto definícii kladieme $\binom{t}{0} = 1$; v súlade s obvyklou konvenciou o prázdnom súčine.

Pomerne prirodzene sa človek môže pýtať otázky:

- Je aj takéto zovšeobecnenie binomických koeficientov na niečo užitočné?
- Budú splnené niektoré vlastnosti, ktoré sme dokázali pre *obvyklú* definíciu binomických koeficientov?
- Ak sa pozeráme na tento výraz ako na funkciu od t , bude mať takýto polynóm niektoré zaujímavé vlastnosti?

Ku všetkým z týchto otázok by sa dalo povedať pár vecí – niektoré z nich azda aj aspoň trochu zaujímavé. My chceme na tomto mieste spomenúť hlavne to, že binomickú vetu vieme zovšeobecniť aj na prípad, kedy je exponent kladné reálne číslo t .

{realexp:VTBINOM}

Veta 4.7.2. *Nech $t \in \mathbb{R}$. Nech $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$. Potom platí rovnosť*

{realexp:EQSERIES}

$$(1+x)^t = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{t}{k} x^k. \quad (4.11)$$

(*T.j. rad na pravej stranej hodnosti konverguje k hodnote uvedenej na ľavej strane.*)

Je užitočné si uvedomiť aj to, že všetky mocniny vystupujúce v uvedenom vzťahu sú také, že základ je kladné reálne číslo – teda nemáme žiadne problémy s tým, či je takáto mocnina naozaj definovaná.

Rovnosť (4.11) môžeme prepísať aj takto:

{realexp:EQSERIES2}

$$(1+x)^t = 1 + tx + \frac{t(t-1)}{2!}x^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-k+1)}{k!}x^k + \cdots \quad (4.12)$$

Ak poznáme z matematickej analýzy výsledky o Taylorových radoch, tak vlastne celé zdôvodnenie vety 4.7.2 sa dá povedať stručne ako: Vieme nájsť Taylorov rad funkcie $f(x) = x^t$ v bode $a = 1$ resp. Taylorov rad funkcie $f(x) = (1+x)^t$ v bode $a = 0$? Aký bude mať tento rad polomer konvergencie?

Dôkaz. Pre funkciu $f(x) = (1+x)^t$ dostaneme ako jej k -tú deriváciu

$$f^{(k)}(x) = t(t-1)\cdots(t-k+1)x^{t-k}.$$

Teda Taylorov rad v bode $a = 0$ má tvar

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \dots \\ (1+x)^t &= 1 + tx + \frac{t(t-1)}{2}x^2 + \dots + \binom{t}{k}x^k + \dots \\ (1+x)^t &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{t}{k}x^k \end{aligned}$$

T.j. dostali sme presne tvar uvedený v rovnosti (4.11).

Máme vyjadrenie v tvare mocninového radu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Skúsme vyjadriť jeho polomer konvergencie. Pre $a_k = \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-k+1)}{k!}$ máme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{t-k}{k+1} \right| = 1.$$

Teda uvedený rad určite konverguje pre $|x| < 1$. □

Môžeme si na tomto mieste všimnúť ako jednu z vecí, čo dostaneme pri takejto zovšeobecnenej definícii binomického koeficientu pre záporné čísla. Nech $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}_0$. Potom platí

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}. \quad (4.13) \quad \{\text{realexp:EQNEG}\}$$

Stačí si upraviť oba uvedené binomické koeficienty.

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+2)(-n-k+1)}{k!} \\ \binom{n+k-1}{k} &= \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots(n+1)n}{k!} \end{aligned}$$

A všimnúť si to, že v oboch číateľoch sa vyskytuje súčin čísel, ktoré sa líšia iba poradím a znamienkom. \{\text{realexp:PRIKLGEM}\}

Príklad 4.7.3. Môžeme si napríklad všimnúť, že pre $n = -1$ z (4.13) dostaneme

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k,$$

a teda v tomto prípade nám (4.11) dáva známe vyjadrenia pre geometrický rad.

$$\begin{aligned} (1+x)^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \\ (1-x)^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \end{aligned}$$

Inak povedané, máme:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \end{aligned}$$

Oba rady konvergujú pre $|x| < 1$.

Pozrime sa ešte na vyjadrenie pre $(1-x)^{-n}$; sčasti preto, že sa nám môže občas hodiť a sčasti preto, že to súvisí s vecami, o ktorých sme už hovorili.

Príklad 4.7.4. Opäť vlastne iba použijeme (4.11), teraz pre $t = -n$. Po použití rovnosti $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$, ktorú sme odvodili v (4.13), dostaneme

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k.$$

Trochu iný pohľad na ten istý problém – vlastne počítame takéto niečo:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1+x+x^2+x^3+\dots)^n.$$

Kolkými spôsobmi môžeme na pravej strane dostať exponent x^k ? Máme n zátvoriek, teda vlastne chceme z každej vybrať nejaké x^{a_i} tak, aby súčet exponentov bol práve k . T.j. chceme, aby platilo

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = k.$$

Podľa vety 3.2.1 máme práve $\binom{n+k-1}{k}$ možností na výber takejto celočíselnej n -tice (a_1, a_2, \dots, a_n) .

Nechajme teraz bokom otázku, či sme si naozaj mohli dovoliť roznásobovať uvedené rady člen po člene. (Na matematickej analýze uvidíte, že takéto niečo funguje bez problémov ak máme absolútne konvergentné rady. Hoci v tomto prípade – keďže používame geometrický rad – by sme to azda boli schopní zdôvodniť aj nejakou jednoduchšou, priamo z definície.)

4.8 Multinomická veta

Z binomickej vety vieme ako vyjadriť koeficienty v rozvoji výrazu tvaru $(x_1 + x_2)^n$. Azda je do istej miery prirodzené pýtať sa aj na výrazy ako $(x_1 + x_2 + x_3)^n$ resp. všeobecnejšie $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$.

Pri roznásobovaní výrazu

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \underbrace{(x_1 + x_2 + \dots + x_k)(x_1 + x_2 + \dots + x_k) \cdots (x_1 + x_2 + \dots + x_k)}_{n\text{-krát}}$$

vyberieme z každej zátvorky niektorý z členov x_1, x_2, \dots, x_k . Dostaneme teda súčiny n takýchto členov, t.j. vlastne výrazy v tvare $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_k^{a_k}$, kde súčet exponentov je práve n .

Kolkými spôsobmi môžeme dostať $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_k^{a_k}$? Inak povedané máme vybrať a_1 zátvoriek pre x_1 , a_2 zátvoriek pre x_2 , atď. Pri tomto výbere záleží na poradí. Teda toto je typ úlohy, aký sme už počítali – vlastne počítame permutácie s opakovaním. Vieme, že ich počet vyjadruje multinomický koeficient (3.1):

$$\binom{n}{a_1, a_2, \dots, a_k} = \frac{n!}{a_1! a_2! \cdots a_k!}$$

Dostali sme takéto zovšeobecnenie binomickej vety:

{multinom:VTMULT}

Veta 4.8.1 (Multinomická veta). *Pre ľubovoľné $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ platí rovnosť*

{multinom:EQMULT}

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{\substack{a_1 + \dots + a_k = n \\ a_i \geq 0}} \binom{n}{a_1, a_2, \dots, a_k} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_k^{a_k} \quad (4.14)$$

Kapitola 5

Princíp zapojenia a vypojenia

V tejto kapitole sa budeme zaoberať *princípom zapojenia a vypojenia*, niekedy sa používa aj názov *princíp inklúzie a exklúzie*.¹

Je to spôsob, ktorým môžeme vypočítať počet prvkov zjednotenia konečne veľa množín. Ukážeme si aj viaceré aplikácie tohto princípu.

5.1 Formulácia a dôkaz princípu zapojenia a vypojenia

Pre disjunktné konečné množiny sme používali fakt, že $|A \cup B| = |A| + |B|$. Vieme vyjadriť počet prvkov množiny $A \cap B$ aj ak tieto množiny nie sú disjunktné? Nie je ťažké si uvedomiť, že v súčte $|A| + |B|$ sú prvky z prieniku dvakrát, teda ich stačí odpočítať a dostaneme

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Niekedy sa môže hodiť prepísať tento vzťah ako výsledok, ktorý počíta počet prvkov doplnku zjednotenia. Ak $A, B \subseteq X$ pre nejakú konečnú množinu X , tak máme

$$|X \setminus (A \cup B)| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

Podobnú úvahu zvládneme urobiť aj pre tri množiny.

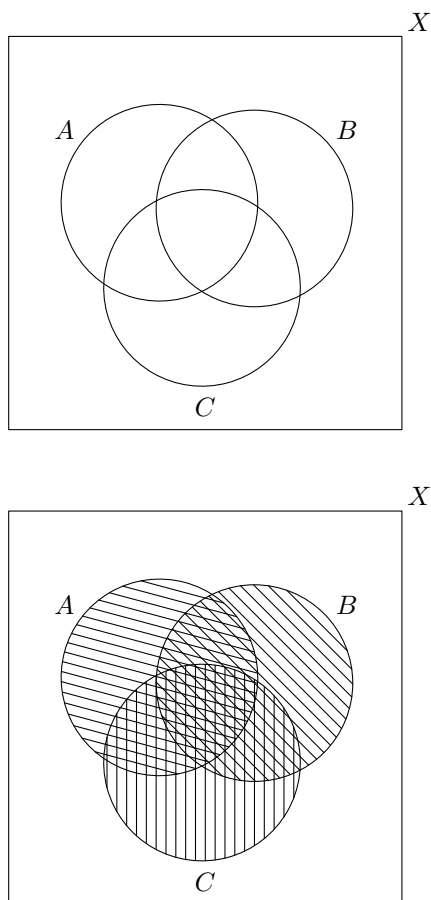
$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ |X \setminus (A \cup B \cup C)| &= |X| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

Na základe toho už vieme uhádnuť, ako to bude fungovať pre viac množín. Pri výpočte $|\bigcup_{i=1}^n A_i|$, sčítame počty prvkov jednotlivých množín, potom odčítame počty prienikov všetkých dvojíc, pripočítame prieniky všetkých trojíc spomedzi našich množín, atď.

Dostávame takto nasledujúci výsledok, ktorý sa zvykne nazývať *princíp zapojenia a vypojenia* alebo *princíp inklúzie a exklúzie*.

{pie:VTPIE}

¹V angličtine: inclusion—exclusion principle.



Obr. 5.1: Prvky, ktoré sme započítali viackrát

{pie:FIGPIESR}

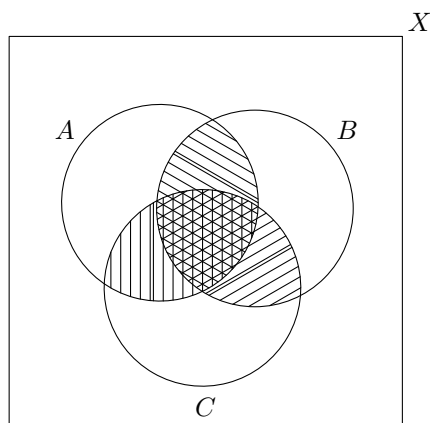
Veta 5.1.1 (Princíp zapojenia a vypojenia). *Nech A_1, \dots, A_n sú konečné množiny a všetky z nich sú podmnožinami konečnej množiny X . Potom pre počet prvkov ich zjednotenia platí:*

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \dots \\ &\dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned} \quad (5.1) \quad \text{{pie:EQPIE}}$$

Ekvivalentne:

$$\begin{aligned} \left| X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \right| &= |X| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \dots \\ &\dots + (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned} \quad (5.2) \quad \text{{pie:EQPIE2}}$$

Iná možnosť ako zapísať princíp zapojenia a vypojenia je prienik $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$



Obr. 5.2: Kolkokrát sme odpočítali jednotlivé prvky

{pie:FIGPIESRAF2}

zapísať stručnejšie ako $\bigcap_{i \in I}$. Pričom takéto výrazy sa tu vyskytnú pre všetky podmnožiny $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ a znamienko bude závisieť od veľkosti množiny I .

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \\ |I|=k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \quad (5.3) \quad \{\text{pie:EQPIESUBSETS}\}$$

Podme sa pozrieť na to, ako by sme vedeli zdôvodniť platnosť vety 5.1.1.

Dôkaz. Chceme zdôvodniť rovnosť

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \\ |I|=k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Označme si $M = \bigcup_{i=1}^n A_i$

Na ľavej strane máme počet prvkov množiny M , na ktorý sa dá pozeráť aj tak, že za každý prvok zo zjednotenia sme započítali jednotku.

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = |M| = \sum_{x \in M} 1.$$

Skúsme sa pozrieť podobným spôsobom na pravú stranu: Každý prvok $x \in M$ sa buď vyskytuje alebo nevyskytuje v $\bigcap_{i \in I} A_i$, teda k príslušnému sčítancu $\left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$ prispieva nulou alebo jednotkou.

Pozrime sa na prípad, keď x patrí práve do s množín z A_1, \dots, A_n . Pretože sa zaoberáme iba takými prvkami x , ktoré patria do nášho zjednotenia, určite máme $s \geq 1$.

Zafixujme si nejaké k z rozsahu $1, 2, \dots, n$ a pozrime sa na to, koľkým sčítancom tvaru $\left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$ prispieje takýto prvok jednotkou. Inak povedané, koľko sa dá vybrať k -prvkových

podmnožín v $\{1, 2, \dots, n\}$ takých, že

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Takýchto možností je presne $\binom{s}{k}$. (Špeciálne ak $k > s$ tak dostaneme nulu.)

To znamená, že takýto prvok x prispel k pravej strane hodnotou

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} \binom{s}{k} \\ &= - \sum_{k=1}^s (-1)^k \binom{s}{k} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{s}{k} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Pričom sme využili rovnosť $\sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{s}{k} = 0$. (Suma binomických koeficientov so striedavými znamienkami dáva nulu, to sme odvodili ako napríklad ako dôsledok binomickej vety v dôsledku 4.2.4. Oplatí sa upozorniť, že tu potrebujeme $s \geq 1$, pre $s = 0$ nám takáto suma dá jednotku.)

Vidíme teda, že príspevok každého prvku ku pravej strane je rovný jednej. \square

Zhruba ten istý argument sa dá o čosi formálnejšie zapísať pomocou charakteristických funkcií.

Dôkaz. Označme si $M = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Pre každú podmnožinu $A \subseteq M$ môžeme zobrať *charakteristickú funkciu* $\chi_A: M \rightarrow \{0, 1\}$ určenú predpisom

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in A, \\ 0 & \text{ak } x \notin A. \end{cases}$$

Malo by byť jasné, že pre každú množinu máme

$$|A| = \sum_{x \in M} \chi_A(x).$$

Teda vlastne na zdôvodnenie (5.3) nám stačí zdôvodniť rovnosť zodpovedajúcich charakteristických funkcií. T.j. chceli by sme zdôvodniť niečo takéto:

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \\ |I|=k}} \chi_{\bigcap_{i \in I} A_i}.$$

Táto rovnosť bude určite vyzerat o čosi prehľadnejšie ak nebudeme ako dolné indexy prieniky. Kvôli stručnosti si teda označme $M_I = \bigcap_{i \in I} A_i$ a vlastne chceme dokázať rovnosť

{pie:EQPIACHAR}

$$\chi_M = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \\ |I|=k}} \chi_{M_I}. \quad (5.4)$$

T.j. pre každé $x \in M$ chceme dokázať, že platí

e:EQPIACHAR2}

$$\chi_M(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\dots,n\} \\ |I|=k}} \chi_{M_I}(x). \quad (5.5)$$

Teraz už vlastne môžeme takmer bez zmeny zopakovať úpravy na konci predošlého dôkazu. Pre každé $x \in M$ máme nejaké $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ také, že x patrí práve do s množín spomedzi A_1, \dots, A_n . Stačí nám už len skontrolovať, že pre takéto x dostaneme

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\dots,n\} \\ |I|=k}} \chi_{M_I}(x) = \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} \binom{s}{k} = 1.$$

□

Poznámka 5.1.2. Môžeme si všimnúť, že v tomto druhom dôkaze sme vlastne dokázali o čosi silnejšie tvrdenie: Vieme, že platí dokonca rovnosť charakteristických funkcií, nie iba rovnosť pre počty prvkov. Ale túto vetu chceme aj tak používať hlavne na počítanie prvkov rôznych zjednotení množín, takže nám úplne stačí takýto výsledok.

Ak náhodou niekomu pomôže vyskúšať si na malých prípadoch to, čo sme vyššie zapísali všeobecne, tak sa opäť môžeme pozrieť na zjednotenie dvoch či troch množín.

$$\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x)$$

$x \in A$	$x \in B$	$\chi_A(x)$	$\chi_B(x)$	$\chi_{A \cap B}(x)$	$\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x)$
✓	✓	1	1	1	$(1 + 1) - 1 = 1$
✓	x	1	0	0	$(1 + 0) - 0 = 1$
x	✓	0	1	0	$(0 + 1) - 0 = 1$

$$\chi_{A \cup B \cup C}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) + \chi_C(x) - \chi_{A \cap B}(x) - \chi_{A \cap C}(x) - \chi_{B \cap C}(x) + \chi_{A \cap B \cap C}(x)$$

$\chi_A(x)$	$\chi_B(x)$	$\chi_C(x)$	$\chi_{A \cap B}(x)$	$\chi_{A \cap C}(x)$	$\chi_{B \cap C}(x)$	$\chi_{A \cap B \cap C}(x)$	Σ
1	1	1	1	1	1	1	$(1 + 1 + 1) - (1 + 1 + 1) + 1 = 1$
1	1	0	1	0	0	0	$(1 + 1 + 0) - (1 + 0 + 0) + 0 = 1$
1	0	1	0	1	0	0	$(1 + 0 + 1) - (0 + 1 + 0) + 0 = 1$
0	1	1	0	0	1	0	$(0 + 1 + 1) - (0 + 0 + 1) + 0 = 1$
1	0	0	0	0	0	0	$(1 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) + 0 = 1$
0	1	0	0	0	0	0	$(0 + 1 + 0) - (0 + 0 + 0) + 0 = 1$
0	0	1	0	0	0	0	$(0 + 0 + 1) - (0 + 0 + 0) + 0 = 1$

Môžeme si všimnúť, že vpravo sme dostali naozaj súčty binomických koeficientov so striedavými znamienkami, konkrétne v jednotlivých zátvorkách máme čísla:

$$\begin{aligned} 3 - 3 + 1 &= 1 \\ 2 - 1 &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Cvičenia

Úloha 5.1.1. Kolkými spôsobmi sa dajú permutovať písmená slova KOMBINATORIKA tak, aby sa neopakovali dve písmená po sebe.

Úloha 5.1.2. [K, Cvičenie 4.9], [HKŠ, Example 1.6.3(iii)] Koľko šesťpísmenkových slov možno zostaviť z písmen slova TIKTAK, ak dve rovnaké písmená nesmú nasledovať bezprostredne za sebou.

Úloha 5.1.3. [HKŠ, Exercise 1.6.4(iii)] Kolkými spôsobmi sa dajú permutovať písmená slova BARBAR tak, aby nenasledovali tesne po sebe?

Úloha 5.1.4. [B, 2.44] Koľko existuje prirodzených čísel bez štvorcov, ktoré nepresahujú 100? (Prirodzené číslo n je číslo bez štvorcov, ak pre $k \in \mathbb{N}$ z $k^2 \mid n$ vyplýva $k = 1$. Inak povedané, nie je deliteľné žiadnou netriviálnou druhou mocninou.)

Hint: Pomôže zamyslieť sa nad tým, ako môže vyzeráť prvočíselný rozklad čísla bez štvorcov.

Úloha 5.1.5. Uvažujme riešenia rovnice $x_1 + x_2 + x_3 = 48$ v nezáporných celých číslach

a) Koľko existuje riešení takých, kde všetky tri čísla x_1, x_2, x_3 sú rôzne?

b) Koľko existuje riešení takých, že $x_1 < x_2 < x_3$?

{piecvic:ULOTRINARODYA}

Úloha 5.1.6. [K, Cvičenie 4.10], [HKŠ, Exercise 6.6(iii)], [Ml, Example 4.4(a)], [V, Problem 214] Kolkými spôsobmi možno do radu usadiť troch Angličanov, troch Francúzov, troch Talianov tak, aby žiadni traja krajanovia nesedeli vedľa seba.

{piecvic:ULOTRINARODYB}

Úloha 5.1.7.

Úloha 5.1.8. [Ml, Exercise 4.20] Kolkými spôsobmi sa dá ofarbiť šachovnica 8×8 ôsmymi farbami, ak v každom riadku sa musí vyskytnúť všetkých osem farieb a súčasne v každom stĺpci pre susedné políčka musíme použiť rôzne farby?

Úloha 5.1.9. [Ma, Exercise 3.1.4(a)] Máme štandardný balíček 52 kariet (t.j. $\{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K\}$ $\{\clubsuit, \diamonds, \spades, \hearts}\}$). Kolkými spôsobmi sa dá vybrať 13 kariet tak, aby sa medzi nimi bola aspoň jedna karta z \clubsuit , aspoň jedna karta z \diamonds , aspoň jedna z \spades , aspoň jedna z \hearts .

Úloha 5.1.10. Aký je počet refazcov dĺžky n z písmen A, B, C, D, E; pričom A, B aj C sa majú vyskytnúť aspoň raz?

Úloha 5.1.11. [HKŠ, Exercise 6.3(iv)] Kolkými spôsobmi sa dá uložiť n veží na šachovnicu $n \times n$ tak, aby každé políčko bolo obsadené alebo ohrozené niektorou z nich? (Odpoveď: $2n^n - n!$.)

5.2 Permutácie bez pevného bodu

5.2.1 Definícia a rekurzívne vyjadrenie

Chceli by sme skúsiť vypočítať, koľko existuje permutácií $\varphi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ takých, že

$$\varphi(i) \neq i$$

pre každé $i = 1, 2, \dots, n$. T.j. zaujímajú nás *permutácie bez pevného bodu*.

Počet takýchto permutácií si označme D_n . (V angličtine sa používa názov derangement.)

Lahko sa dajú vymyslieť nejaké príklady situácií, kedy sa takéto niečo vyskytne:

- Klasický príklad, na ktorom sa tento problém zvykne ilustrovať: n ľudí si niekam odloží svoj dáždnik (kabát, klobúk) – a pri odchode si náhodne zoberie niektorý z odložených. Aká je pravdepodobnosť, že každý má cudzí dáždnik?
- Učiteľ vysvetlí študentom správne riešenie a potom im rozdá domáce úlohy, aby si ich obodovali – ale chce to urobiť tak, aby nikto nehodnotil svoju vlastnú úlohu.

Pre malé n by sme asi boli aj vypísať všetky prípady.

Napríklad pre $n = 2$ dostaneme jedinú takú permutáciu $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Pre $n = 3$ dostaneme dve permutácie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pre $n = 4$ ich už bude viac, ale opäť po troche skúšanie by sme azda vedeli nájsť všetky

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Podme sa skúsiť zamyslieť, či by sme vedeli nájsť D_n aj pre väčšie n nejakou inteligentnejšou než prechádzaním jednotlivých možností.

Konkrétne sa pokúsime odvodiť, že platí takýto vzťah

$$D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \tag{5.6} \quad \{\text{der:EQREKUR}\}$$

pre všetky $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$.

Dôkaz rekurentného vzťahu (5.6). Označme si $\varphi(1) = k$. Na voľbu k máme presne $(n - 1)$ možností.

- Ak $\varphi(k) = 1$, tak mám D_{n-2} možností ako poprehadzovať ostatných $n - 2$ prvkov, t.j. ako vyrobím permutáciu množiny $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{1, k\}$ bez pevného bodu;
- Ak chcem spočítať počet možností takých, že $\varphi(k) \neq 1$, tak pozície $2, 3, \dots, n$ umiestňujem čísla z $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\}$ pričom na každej pozícii mám práve jednu zakázanú možnosť. Teda takýchto permutácií bude D_{n-1} .

□

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & k & \dots \\ k & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{2em}}_{\text{tu}} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{\text{a tu}}$

je $(n - 2)$ pozícií, ktoré môžem spermutovať D_{n-2} spôsobmi.

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & k & \dots \\ k & \dots & \varphi(k) \neq 1 & \dots \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{4em}}$

na každej pozícii mám zakázanú jednu z $(n - 1)$ možností

Z tejto rekurencie sa dá dopracovať aj k vzťahu

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \quad (5.7) \quad \{\text{der:EQREK2}\}$$

ktorý je azda ešte o trochu jednoduchší (úloha 5.2.1).

Dôkaz založený na tej istej základnej myšlienke môžeme zapísať aj trochu inak:

Dôkaz rekurentného vzťahu (5.6). Označme $\varphi(1) = k$. Na tejto pozícii sa môže vyskytnúť práve $(n-1)$ rôznych čísel. Podobne ako vyššie, ideme rozobrať počty možností v závislosti od toho, či $\varphi(k) = 1$ alebo $\varphi(k) \neq 1$.

Označme si τ permutáciu, ktoré vymieňa 1 a k (a všetky ostatné prvky necháva na mieste). Budeme sa pozeráť na permutáciu $\psi = \tau \circ \varphi$.

Všimnime si, že $\psi(1) = 1$, teda takáto zložená permutácia necháva jednotku na mieste. Súčasne pre $j \notin \{1, k\}$ máme $\psi(j) = \varphi(j)$, teda s výnimkou pozícií 1 a k sa táto permutácia správa presne ako pôvodná permutácia.

Ešte sa oplatí uvedomiť si aj to, že z permutácie ψ vieme dostať φ , konkrétne platí $\tau \circ \psi = \varphi$.

- Ak $\varphi(k) = 1$, tak $\psi(k) = k$. Teda permutácia ψ má práve jeden pevný bod, konkrétne k . Ak sa pozeráme už iba na ostatné prvky $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{1, k\}$, tak na tejto množine máme permutáciu bez pevného bodu a tu máme teda D_{n-2} možností.
- Ak $\varphi(k) \neq 1$, tak $\psi(k) \neq k$. Teda permutácia ψ zúžená na $\{2, 3, \dots, n\}$ je permutácia bez pevného bodu, teda máme práve D_{n-1} možností.
- Súčasne si treba uvedomiť, že v oboch prípadoch každej permutácii φ (vyhovujúcej uvedeným podmienkam) zodpovedá práve jedna permutácia ψ a obrátene.

V oboch prípadoch nám zobrazenie $\varphi \mapsto \varphi \circ \tau$ dalo bijekciu medzi nejakými množinami permutácií. V prvom prípade medzi permutáciami takými, že $\varphi(k) = 1$ a množinou permutácií, ktorá má práve D_{n-2} prvkov. V druhom prípade sme sa pozerali na tie permutácie, kde $\varphi(k) \neq 1$ a takto \square

Pomocou (5.6) či (5.7) vieme vyčíslit D_n pre viaceré ďalšie hodnoty n . Vypíšme si aspoň zopár malých prípadov.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D_n	1	0	1	2	9	44	265	1 854	14 833	133 496

5.2.2 Vyjadrenie D_n pomocou princípu inklúzie a exklúzie

Princíp zapojenia a vypojenia sa dá použiť na to, aby sme vedeli D_n vyjadriť nasledovným spôsobom:

$\{\text{der:VTPIE}\}$

Veta 5.2.1. *Pre každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí*

$\{\text{der:EQPIE}\}$

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = n! \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \quad (5.8)$$

Poznamenajme, že rovnosť (5.8) by sme vedeli odvodiť aj matematickou indukciou na základe rekurentného vzťahu 5.7 (úloha 5.2.2). Dôkaz pomocou princípu zapojenia má tú výhodu, že tam nám takéto vyjadrenie vyjde; ak by sme chceli postupovať matematickou indukciou, tak by sme museli nejako „uhádnuť“ čomu sa rovná pravá strana (t.j. prísť na to, aké tvrdenie vlastne chceme dokazovať indukciou).

Dôkaz. Ak si ako X označíme množinu všetkých permutácií množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ a ako A_i množinu tých permutácií, ktoré nemajú prvok i , tak vlastne chceme vypočítať počet prvkov množiny $X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$.

$$\begin{aligned} X &= S_n \\ A_i &= \{\varphi \in S_n; \varphi(i) = I\} \\ D_n &= |X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)| =? \end{aligned}$$

Toto je presne situácia z vety 5.1.1.

Pozrime sa na to, čo by sme vedeli povedať o sčítancoch tvaru

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$

Toto je vlastne počet permutácií, ktoré nechávajú na mieste čísla i_1, i_2, \dots, i_k . Takých permutácií je presne $(n - k)!$.

Túto hodnotu teraz vlastne len dosadíme do (5.2), t.j. do vzťahu

$$\begin{aligned} \left| X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \right| &= |X| - \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \dots \\ &\dots + (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|, \end{aligned}$$

len si pritom ešte uvedomíme, že pre každú voľbu $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ dostaneme v tú istú hodnotu, teda k -ty sčítanec môžeme zjednodušiť takto.

$$(-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (-1)^k \binom{n}{k} (n - k)!$$

Tento výraz ešte môžeme trochu zjednodušiť na základe toho, že

$$\binom{n}{k} (n - k)! = \frac{n!}{k!(n - k)!} (n - k)! = \frac{n!}{k!}.$$

Dostávame tak vyjadrenie pre D_n , ktoré ešte trochu upravíme:

$$D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n - k)! = \sum_{k=0}^n (-1)^k (-1)^k \frac{n!}{k!},$$

čo je naozaj rovnosť (5.8). □

Poznámka 5.2.2. Všimnime si, že vyjadrenie sumy z princípu zapojenia a vypojenia sa výrazne zjednodušila tým, že pre každý výber k -tice i_1, \dots, i_k bol počet prvkov v prieniku $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$ rovnaký. T.j. vlastne celá suma sa zmenila na

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} P_k,$$

kde P_k označuje počet prvkov v prieniku k množín a P_0 označuje $|X|$.

{der:POZNPIEROVNAKE}

$$\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \quad (5.9) \quad \{\text{der:EQPIE2}\}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} + \dots$$

$$\{\text{der:EQ LIM}\} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{e} \quad (5.10)$$

Ak sa vrátíme k príkladom zo začiatku tejto časti, tak sa to dá interpretovať tak, že pravdepodobnosť že si nikto nezobral naspäť svoj dáždník je približne $\frac{1}{e}$. (Alebo pravdepodobnosť, že po náhodnom rozdani ani jeden študent či študentka neopravuje svoju domácu úlohu, je približne $\frac{1}{e}$.)

Môžeme si všimnúť, že D_n je naozaj pomerne blízko hodnoty $\frac{n!}{e}$. (Už pre pomerne malé n neurobíme priveľmi veľkú chybu, ak D_n odhadneme číslom $\frac{n!}{e}$.)

$$R_n = \left| D_n - \frac{n!}{e} \right| = n! \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \dots$$

Dostali sme teda, že platí:

$$\left| D_n - \frac{n!}{e} \right| < \frac{1}{n+1}.$$

5.2.3 Ďalšie vlastnosti D_n

Vzťah (5.8) vyjadruje D_n ako súčet výrazov s faktoriálmi $1!, 2!, \dots, n!$. Nasledujúci vzťah je do istej miery obrátený – faktoriál je vyjadrený pomocou D_1, \dots, D_n .

$$\{\text{der:EQFAKT}\} \quad n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} D_k \quad (5.11)$$

Dôkaz sme ponechali ako cvičenie – úloha 5.2.4.

Cvičenia

$\{\text{dercvc:ULO REKUR}\}$

Úloha 5.2.1. Ukážte, že $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ platí pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

$\{\text{dercvc:ULO BEZPIE}\}$

Úloha 5.2.2. Ukážte rovnosť (5.8) matematickou indukciou a použitím (5.7). (T.j. bez použitia princípu zapojenia a vypojenia.)

$\{\text{dercvc:ULO KFIXED}\}$

Úloha 5.2.3. Uvažujme permutácie množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Ako sa dá vyjadriť počet permutácií, ktoré majú práve k pevných bodov?

cvic:ULOFAKT}

Úloha 5.2.4. Ukážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} D_k,$$

t.j. rovnosť (5.11).

Úloha 5.2.5. [K, Cvicenie 4.9] Dvaja učitelia skúšajú súčasne skupinu 4 študentov, každý jeden predmet. Každý študent odpovedá z jedného predmetu 30 minút. Koľko existuje rozvrhov skúšania, ak požadujeme, aby skúšky skončili za dve hodiny?

5.3 Počet surjektívnych zobrazení

Ak sme poznali veľkosti množín A a B , tak sme veľmi jednoducho vedeli vyjadriť počet všetkých zobrazení a aj počet injektívnych zobrazení $A \rightarrow B$. Vedeli by sem niečo povedať o počet surjekcií? Pozrieme sa na tento problém pomocou princípu zapojenia a vypojenia.

Označme si (pre potreby tejto časti) ako $\text{Sur}(n, k)$ počet všetkých surjektívnych zobrazení z n -prvkovej množiny do k -prvkovej množiny. Vidíme napríklad, že $\text{Sur}(n, k) = 0$ pre $n < k$. Alebo tiež si ľahko uvedomíme, že $\text{Sur}(n, n) = n!$ a $\text{Sur}(n, 1) = 1$. A pre nejaké malé hodnoty n a k by sme skúšaním vedeli nájsť $\text{Sur}(n, k)$.

{surj:POZNSTIR}

Poznámka 5.3.1. Počet surjektívnych zobrazení z k -prvkovej množiny do n -prvkovej množiny do súvisí aj s počtom rozkladov n -prvkovej množiny na k neprázdnych častí, takémuto problému sa venujeme v časti 6.1.1. Konkrétne platí $\text{Sur}(n, k) = k! \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$, kde $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ predstavuje počet rozklad n -prvkovej množiny na k podmnožín; pozri poznámku 6.1.2.

Podme sa pozrieť na to, že ako sa $\text{Sur}(k, n)$ dá vyjadriť pomocou princípu zapojenia a vypojenia.

Tvrdenie 5.3.2. *Nech $k, n \in \mathbb{N}_0$, $k < n$ a X, Y sú konečné množiny také, že $|A| = n$, $|B| = k$. Potom počet surjekcií z A do B je rovný*

$$\text{Sur}(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n. \quad (5.12) \quad \{\text{surj:EQPIE}\}$$

Uvedenú rovnosť môžeme prepísať ako:

$$\begin{aligned} \text{Sur}(n, k) = k^n - k(k-1)^n + \binom{k}{2}(n-2)^n - \binom{k}{3}(k-3)^n + \dots \\ \dots + (-1)^{k-2} \binom{k}{k-2} 2^n + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} 1^n \end{aligned} \quad (5.13) \quad \{\text{surj:EQPIE2}\}$$

Dôkaz. Pozeráme sa na zobrazenia z n -prvkovej množiny do k -prvkovej množiny, bez ujmy na všeobecnosti si môžeme zobrať priamo $B = \{1, 2, \dots, k\}$. Keďže chceme surjekcie, tak chceme aby každý prvok $i \in Y$ mal vzor, t.j. také zobrazenia, že množina $f^{-1}(\{i\})$ je neprázdna.

Označme si pre $i = 1, 2, \dots, k$ ako A_i množinu takých zobrazení, kde sa nič nezobrazí na i .

$$A_i = \{f: A \rightarrow B; f^{-1}(\{i\}) = \emptyset\}$$

Ak ešte ako X označíme množinu všetkých zobrazení $A \rightarrow B$, tak vlastne hľadáme

$$\text{Sur}(n, k) = \left| X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \right|,$$

čiže môžeme aplikovať princípe zapojenia a vypojenia v podobe (5.2), ak sa nám podarí vyjadriť veľkosti množín, ktoré tu vystupujú.

Máme $|X| = k^n$. Množina

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_j}$$

pozostáva z tých zobrazení, kde sa nič nezobrazí na žiadny z prvkov i_1, i_2, \dots, i_j . T.j. máme zostávajúcich $n - j$ prvkov, na ktoré sa môže niečo zobrazíť – a takýchto zobrazení je presne $(k - j)^n$.

$$\begin{aligned} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_j}| &= (k - j)^n \\ (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_j}| &= (-1)^j \binom{n}{j} (k - j)^n \end{aligned}$$

Z vety 5.1.1 potom dostaneme rovnosť

$$\text{Sur}(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k - j)^n,$$

kde sčítanec zodpovedajúci $j = 0$ je počet prvkov celej množiny $|X| = k^n$. □

5.4 Eulerova funkcia

5.4.1 Vyjadrenie Eulerovej funkcie pomocou prvočíselného rozkladu

Definícia 5.4.1. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\varphi(n) = |\{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq n, \gcd(k, n) = 1\}|,$$

t.j. $\varphi(n)$ označuje počet celých čísel $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, ktoré sú nesúdeliteľné s číslom n .

Túto funkciu $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ nazývame *Eulerova funkcia*.

Pre malé hodnoty vieme nájsť hodnotu $\varphi(n)$ aj tak, že vyskúšame, ktoré čísla sú nesúdeliteľné s n .

n	$\varphi(n)$	$\{k; \gcd(k, n) = 1\}$
1	1	{1}
2	1	{1}
3	2	{1, 2}
4	2	{1, 3}
5	4	{1, 2, 3, 4}
6	2	{1, 5}
7	6	{1, 2, 3, 4, 5, 6}
8	4	{1, 3, 5, 7}
9	6	{1, 2, 4, 5, 7, 8}
10	4	{1, 3, 7, 9}

Lahko si vieme rozmyslieť napríklad to, že pre prvočísla máme $\varphi(p) = p - 1$. A nie je moc ťažké nájsť hodnotu Eulerovej funkcie ani pre mocniny prvočísel, vtedy dostaneme

$$\varphi(p^a) = p^a - p^{a-1} = p^{a-1}(p - 1) = p^a \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Veta 5.4.2. *Nech $n \in \mathbb{N}_0$. Potom platí*

{euler:VTPROD}

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad (5.14) \quad \text{{euler:EQPROD}}$$

kde súčin na pravej strane prebieha cez všetky prvočíselné delitele čísla n .

Uvedený výraz vieme zapísať aj tak, že ak $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ je kanonický rozklad čísla n , tak

$$\varphi(n) = \prod_{j=1}^k (p_j^{a_j} - p_j^{a_j-1}) = \prod_{j=1}^k p_j^{a_j-1} (p_j - 1).$$

(Skúste si rozmyslieť, že oba tieto zápisy predstavujú to isté.)

Príklad 5.4.3. Napríklad ak $n = p^a$ pre nejaké prvočíslo, tak z (5.14) dostaneme presne to isté vyjadrenie, ktoré sme už spomenuli vyššie:

$$\varphi(p^a) = p^a \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Môžeme tiež skontrolovať, že

$$\begin{aligned} \varphi(6) &= 6 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 2 \\ \varphi(10) &= 6 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 4 \end{aligned}$$

Dôkaz. V množine $X = \{1, 2, \dots, n\}$ chceme nájsť všetky čísla, ktoré sú nesúdeliteľné s číslom n . Označme p_1, p_2, \dots, p_k všetky prvočíselné delitele čísla n . Z množiny X chceme vlastne dať preč tie čísla, ktoré sú deliteľné niektorým z týchto prvočísel, čiže prvky množín

$$A_i = \{s \in X; p_i \mid s\}.$$

Zaujíma nás teda

$$\varphi(n) = |X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k)|.$$

Pritom vieme vypočítať počty prvkov jednotlivých prienikov vystupujúcich v princípe zapojenia a vypojenia.

$$\begin{aligned} |A_i| &= \frac{n}{p_i} \\ |A_{i_1} \cap A_{i_2}| &= \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}} \\ |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_j}| &= \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_j}} \end{aligned}$$

Teda na základe princípu zapojenia a vypojenia dostaneme:

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= n - \sum_{i=1}^k \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}} + \dots \\ &\dots + (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq k} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_j}} + \dots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_k}. \end{aligned}$$

Z každého z týchto členov môžeme vyňať n a dostaneme tak

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2}} + \dots + (-1)^k \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_k} \right).$$

Teraz si už treba uvedomiť, že výraz v zátvorke na pravej strane je to isté, čo dostaneme roznásobením nasledujúceho súčinu:

$$\prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_j} \right) = \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k} \right).$$

□

Ak poznáme vyjadrenie pre $\varphi(n)$ na základe kanonického rozkladu, tak je pomerne ľahké overiť nasledujúce vlastnosti – dôkaz sme ponechali ako cvičenie (úlohy 5.4.3 a 5.4.4).

{euler:DOSMULT}

Dôsledok 5.4.4. Ak $m, n \in \mathbb{N}$ sú nesúdeliteľné, t.j. $\gcd(m, n) = 1$, tak platí

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Funkcie, ktoré majú vlastnosť z dôsledku 5.4.4 sa zvyknú volať aj *multiplikatívne funkcie*. S takýmito funkciami sa môžete stretnúť aj na iných predmetoch, pozri [S].

{euler:DOSMULT2}

Dôsledok 5.4.5. Pre ľubovoľné $m, n \in \mathbb{N}$ označme $d = \gcd(m, n)$. Potom platí

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n) \frac{d}{\varphi(d)}.$$

Môžeme porovnať výpočet hodnoty φ pomocou vety 5.4.2 a dôsledku 5.4.4 – ten nám umožní používať hodnoty funkcie φ v mocninách prvočísel.

Príklad 5.4.6. Majme $n = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

$$\begin{aligned} \varphi(360) &= 360 \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{5} \right) = \frac{360 \cdot 4}{3 \cdot 5} = 96 \\ \varphi(360) &= \varphi(2^3)\varphi(3^2)\varphi(5) = 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 2^5 \cdot 3 = 96 \end{aligned}$$

Pozrime sa na to, že Eulerova funkcia nám niekedy môže pomôcť pri type príkladov, na ktoré by sme typicky používali princíp zapojenia a vypojenia.

Príklad 5.4.7. Kolko je prirodzených čísel n takých, že $n \leq 200$ a n nie je deliteľné žiadnym z čísel 2, 5, 7?

Tieto čísla sú dosť malé na to, že sme schopní ich aj vypísať. (A azda pri troche rozmýšľania by sme prišli na to, že možno netreba vypisovať všetko až po 200; čo snáď bude jasné aj z riešení, ktoré si ukážeme.)

V nasledujúcej tabuľke sú zvýraznené „zlé“ čísla, t.j. všetky párne čísla, všetky násobky päťky a všetky násobky sedmičky.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Vidíme, že biele štvorčeky zostali iba v štyroch stĺpcoch a spolu ich je $17 + 18 + 17 + 17 = 69$.

Pozrime sa na to, ako túto úlohu vieme vyriešiť rozumnejšie než vypisovaním možnosti – to v akej kapitole je úloha zaradená nám nepriamo prezrádza, čo by sme tam asi mohli použiť.

Riešenie pomocou PIE.

$$\begin{aligned} X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= 200 - \left\lfloor \frac{200}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{14} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{35} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{70} \right\rfloor \\ &= 200 - 100 - 40 - 28 + 20 + 14 + 5 - 2 = 69 \end{aligned}$$

□

Riešenie pomocou Eulerovej funkcie. Máme $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ a

$$\varphi(70) = 70 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 70 \cdot \frac{1 \cdot 4 \cdot 6}{2 \cdot 5 \cdot 7} = 24.$$

To znamená, že medzi číslami 1 až 70 je práve 24 čísel nesúdeliteľých s číslom 70; čo je iba inak vyjadrená podmienka, že nemajú byť deliteľné 2, 5 ani 7.

Situácia bude presne rovnaká pre každý úsek po sebe idúcich čísel dĺžky 70, teda aj od 71 po 140 a tiež od 141 po 210.

Vidíme teda, že čísel vyhovujúcich daných podmienkam takých, že $n \leq 210$ je presne $3 \cdot 24 = 72$. V rozsahu $201 \leq n \leq 210$ máme iba tri takéto čísla: 201, 207 a 209.

Teda čísel vyhovujúcich zadaniu, ktoré majú veľkosť nanajvyš 200, je práve $72 - 3 = 69$. □

5.4.2 Niektoré vlastnosti Eulerovej funkcie

Pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d), \quad (5.15) \quad \{\text{euler:EQSUMN}$$

príčom sumu na pravej strane chápeme tak, že sčítujeme cez všetky *prirodzené* čísla d , ktoré sú deliteľmi čísla n . (Úloha 5.4.1.)

Môžeme si tiež všimnúť, že s výnimkou prípadov $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$ dostávame ako hodnoty funkcie φ iba párne čísla (úloha 5.4.2).

5.4.3 Eulerova funkcia a kongruencie

Keďže sme sa trochu zaoberali Eulerovou funkciou, azda sa patrí aspoň spomenúť Eulerovu vetu – čo je veľmi známy výsledok o kongruenciách. (A je vcelku možné, že ste sa už niekde stretli aspoň s Malou Fermatovou vetou, ktorá je jej špeciálnym prípadom.)

Naozaj ich však iba spomenieme, nebudeme sa nijako venovať dôkazom – tie necháme na iné predmety. Pozri napríklad [Č], [S], [ŠHHK, Veta 3.3.5], [JJ, Theorem 5.3].

Veta 5.4.8 (Eulerova veta). *Nech $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ sú také, že $\gcd(a, n) = 1$. Potom platí*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Príklad 5.4.9. Napríklad pre $n = 16$ máme $\varphi(16) = 8$. Vieme pomerne ľahko skontrolovať, že platí:

$$\begin{aligned} 1^8 &\equiv 1 \pmod{16} \\ 3^8 &\equiv (3^2)^4 \equiv 1^4 \equiv 1 \pmod{16} \\ 5^8 &\equiv (5^2)^4 \equiv 9^4 \equiv (9^2)^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{16} \\ 7^8 &\equiv (7^2)^4 \equiv 1^4 \equiv 1 \pmod{16} \end{aligned}$$

Pre zvyškové triedy 9, 11, 13 a 15 máme

$$\begin{aligned} 9^8 &\equiv (-7)^8 \equiv (-1)^8 7^8 \equiv 7^8 \equiv 1 \pmod{16} \\ 11^8 &\equiv (-5)^8 \equiv (-1)^8 5^8 \equiv 5^8 \equiv 1 \pmod{16} \\ 13^8 &\equiv (-3)^8 \equiv (-1)^8 3^8 \equiv 3^8 \equiv 1 \pmod{16} \\ 15^8 &\equiv (-1)^8 \equiv (-1)^8 1^8 \equiv 1^8 \equiv 1 \pmod{16} \end{aligned}$$

Tým sme pokryli všetky zvyškové triedy nepárnych čísel modulo 16.

Môžeme si všimnúť, že pre $n = 16$ platí dokonca o čosi viac. Z Eulerovej vety dostávame, že pre nepárne a by malo platiť $a^8 \equiv 1 \pmod{16}$. Výpočty, ktoré sme uviedli vyššie, ukazujú, že platí dokonca aj $a^4 \equiv 1 \pmod{16}$

Príklad 5.4.10. $\varphi(9) = 6$, teda Eulerova veta nám hovorí, že ak

$$a^6 \equiv 1 \pmod{9}$$

pre každé $a \in \mathbb{Z}$ také, že $\gcd(a, 9) = 1$. T.j. pre celé čísla a také, že $3 \nmid a$. Opäť aj tu vieme

vcelku ľahko skontrolovať, že to je naozaj pravda.

$$\begin{aligned} 1^6 &\equiv 1 \pmod{9} \\ 2^6 &\equiv (2^3)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{9} \\ 4^6 &\equiv (4^3)^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{9} \\ 5^6 &\equiv (-4)^6 \equiv 4^6 \equiv 1 \pmod{9} \\ 7^6 &\equiv (-2)^6 \equiv 4^6 \equiv 1 \pmod{9} \\ 8^6 &\equiv (-1)^6 \equiv 4^6 \equiv 1 \pmod{9} \end{aligned}$$

Ak použijeme Eulerovu vetu na prípad, keď p je prvočíslo a $\varphi(p) = p - 1$, dostaneme Malú Fermatovu vetu:

Veta 5.4.11 (Malá Fermatova veta). *Nech $a \in \mathbb{Z}$ a p je prvočíslo. Potom platí*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Tento výsledok môžeme sformulovať aj tak, že pre ľubovoľné $a \in \mathbb{Z}$ platí

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Malá Fermatova veta nám napríklad dáva nejakú možnosť, ako počítať inverzný prvok v poli \mathbb{Z}_p . Takéto niečo ste možno spomenuli aj v zimnom semestri na lineárnej algebre.²

Cvičenia

Úloha 5.4.1. Ukážte, že pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}_0$ platí $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$, t.j. rovnosť (5.15). (Hint: Môže pomôcť skúsiť nejako rátať, koľko je takých $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, pre ktoré $\gcd(k, n) = d$.)

Úloha 5.4.2. Ukážte, že pre $n > 2$ je $\varphi(n)$ párne číslo.

Úloha 5.4.3. Ukážte, že ak $m, n \in \mathbb{N}$ sú nesúdeliteľné, tak platí $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. (T.j. dokážte dôsledok 5.4.4.)

Úloha 5.4.4. Ukážte, že pre ľubovoľné $m, n \in \mathbb{N}$ platí

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n) \frac{d}{\varphi(d)},$$

kde $d = \gcd(m, n)$. (T.j. dokážte dôsledok 5.4.4.)

Úloha 5.4.5. Koľko prirodzených čísel $n \leq 1000$ je deliteľných dvojkou alebo sedmičkou?

Úloha 5.4.6. Koľko je prirodzených čísel $n \leq 1000$, ktoré sú deliteľné dvojkou, trojkou alebo päťkou?

Úloha 5.4.7. [V, Problem 136] Koľko je celých čísel v rozsahu 0 až 999, ktoré nie sú deliteľné päťkou ani sedmičkou

Úloha 5.4.8. Koľko je prirodzených celých čísel n takých, že $1 \leq n \leq 250$ a súčasne n nie je deliteľné žiadnym z čísel 2, 3, 5, 7?

Úloha 5.4.9. Koľko je prirodzených čísel $n \leq 2000$, ktoré nie sú deliteľné dvojkou, trojkou ani päťkou, ale súčasne sú deliteľné sedmičkou. T.j. $7 \mid n$, $2 \nmid n$, $3 \nmid n$, $5 \nmid n$.

²<https://msleziak.com/forum/viewtopic.php?t=2005>

5.5 Möbiova funkcia

{mobius:BEET}

Definícia 5.5.1. Pre $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\mu n = \begin{cases} 1 & \text{ak } n = 1, \\ (-1)^k & \text{ak } n = p_1 p_2 \cdots p_k \text{ kde } p_1, p_2, \dots, p_k \text{ sú rôzne prvočísla} \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Funkciu μ nazývame *Möbiova funkcia*.

{TVREULERMÖBI}

Tvrdenie 5.5.2. Pre každé prirodzené číslo $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\varphi(n) = n \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = \sum_{d|n} \mu(d) d$$

Dôkaz. Označme si všetky prvočísla vyskytujúce sa v rozklade čísla n ako p_1, p_2, \dots, p_k . Eulerova funkcia $\varphi(n)$ vracia počet prirodzených čísel z rozsahu $1, 2, \dots, n$, ktoré sú nesúdeliteľné s číslom n . Teda ak si označíme

$$X = \{1, 2, \dots, n\} \\ A_i = \{k \in n; p_i \mid k\}$$

tak vlastne chceme vypočítať $\varphi(n) = |X \setminus \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k\}|$.

Počty prvkov v týchto množinách sú:

$$|X| = n \\ |A_i| = \frac{n}{p_i} \\ |A_{i_1} \cap A_{i_2}| = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}} \\ |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_j}| = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_j}}$$

Dostávame teda

$$\varphi(n) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \sum \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_j}},$$

kde vnútorná suma prebieha cez všetky j -prvkové podmnožiny $\{i_1, i_2, \dots, i_j\} \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$.

Keď porovnáme tento výraz s definíciou Möbiovej funkcie, je to to isté ako rovnosť

$$n \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

Jediný rozdiel je, že sme pridali aj sčítance pre tie delitele, kde deliteľ d obsahuje vyššie mocniny prvočísel – v týchto prípadoch je však $\mu(d) = 0$, a teda neovplyvnia hodnotu sumy. \square

Definícia 5.5.3. Pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$ označme $\pi(x)$ počet prvočísel, ktoré sú menšie alebo rovné x . Funkciu π voláme *prvočíselná funkcia*.

:PRIKLPRIMES}

Príklad 5.5.4. Označme k -te prvočíslo ako p_k , t.j. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, atď. Potom platí

ie2:EQPRIMES}

$$\pi(n) = n - 1 + \pi(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \sum (-1)^k \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}} \right\rfloor, \quad (5.16)$$

príčom suma prebieha všetky neprázdne podmnožiny $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, \lfloor \sqrt{n} \rfloor\}$

Dôkaz. Každé číslo z rozsahu $1, 2, \dots, n$ je deliteľné niektorým prvočísлом takým, že $p^2 \leq n$ t.j. $p \leq \sqrt{n}$. Ak si označíme $K = \pi(\lfloor \sqrt{n} \rfloor)$, stačí sa nám zaoberať prvočíslami p_1, p_2, \dots, p_K .

Označme si $X = \{1, 2, \dots, n\}$ a $A_i = \{k \in X; p_i \mid k\}$. Čiže A_i obsahuje všetky čísla, ktoré sú deliteľné prvočíslom p_i a prienik $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$ obsahuje tie čísla, ktoré sú deliteľné súčinom $p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}$. Môžeme si uvedomiť, že platí:

$$\begin{aligned} A_i &= \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor \\ A_{i_1} \cap A_{i_2} &= \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}} \right\rfloor \\ A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k} &= \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}} \right\rfloor \end{aligned}$$

Ak použijeme PIE na tieto množiny, tak dostaneme

$$|X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_K)| = n - \sum (-1)^k \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}} \right\rfloor.$$

Teda táto suma vyjadruje počet prvkov množiny $X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_K)$. Aké prvky obsahuje táto množina?

Sú to tie prirodzené čísla z rozsahu $1, 2, \dots, n$, ktoré nie sú deliteľné žiadnym z prvočísel p_1, p_2, \dots, p_K . To znamená, že spomedzi čísel takých, že $\sqrt{n} < k \leq n$ sme vyhodili všetky zložené čísla. Súčasne sme však vyhodili aj prvočísla veľkosti nanejvýš \sqrt{n} . Ak teda chceme zarátať aj tie, potrebujeme pridať ešte tieto prvočísla, ktorých je práve $\pi(\sqrt{n}) = \pi(\lfloor \sqrt{n} \rfloor)$. A ešte sme započítali aj jednotku, ktorá nie je prvočíslo. Takto naozaj dostaneme pre počet prvočísel vzťah (5.16). \square

Sumu z 5.16 pomocou Möbiovej funkcie môžeme prepísať ako

$$\pi(n) = n - 1 + \pi(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \sum \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \quad (5.17) \quad \{\text{pie2:EQPIMU}\}$$

príčom suma prebieha cez všetky delitele d čísla $p_1 p_2 \cdots p_{\pi(\sqrt{n})}$.

Cvičenia

5.6 Ešte raz $x_1 + \dots + x_k = n$

{riespie:SECT}

V časti 3.2 sme sa zaoberali celočíselnými riešeniami rovnice $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$. Ukázali sme, že takýchto riešení vyhovujúcim podmienke $x_i \geq 0$ je práve $\binom{n+k-1}{k-1}$ a pri podmienke $x_i \geq 1$ dostaneme presne $\binom{n-1}{k-1}$ riešení (tvrdenie 3.2.1 a dôsledok 3.2.4). Chceme sa teraz pozrieť na takúto otázku, ak nám okrem dolných ohraničení pribudnú aj horné ohraničenia.

Keď máme k dispozícii vetu 5.1.1, t.j. princíp zapojenia a vypojenia, tak vieme nájsť aspoň nejaký spôsob, ako niečo vyjadriť počet riešení.

Príklad 5.6.1. Koľko existuje riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

v nezáporných celých čísla takých, že $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 6$, $x_3 \leq 12$?

Vlastne sa teda pozeráme na počet prvkov množiny

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 15, 0 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 6, 0 \leq x_3 \leq 12\}.$$

Označme si

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 15, 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3\},$$

t.j. na chvíľu ignorujeme horné ohraničenia. Počet prvkov tejto množiny vieme vypočítať na základe tvrdenia 3.2.1, je rovný $\binom{15+2}{2} = \binom{17}{2}$.

Máme v tejto množine však veľa trojíc navyše – konkrétne tie, kde $x_1 > 3$, $x_2 > 6$, $x_3 > 13$. Ak si označíme

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_1 \geq 4\}$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_2 \geq 7\}$$

$$A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_3 \geq 13\}$$

tak vlastne chceme vypočítať

$$|S| = |X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|.$$

Ak vieme vypočítať počty prvkov pre A_1 , A_2 , A_3 a prieniky týchto množín, tak dostaneme nejaké vyjadrenie pre počet prvkov tejto množiny. Toto sú však úlohy takého typu, aké sme už riešili (príklad 3.2.3 a viaceré cvičenia v časti 3.2). Stručne pripomeňme ako sme to robili.

Napríklad počet prvkov A_1 , kde máme podmienku $x_1 \geq 4$ dostaneme tak, že vlastne máme:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

$$(x_1 - 4) + x_2 + x_3 = 11$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 11$$

Nové premenné $y_1 = x_1 - 4$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ už zodpovedajú podmienkam $y_i \geq 0$ a z tvrdenia 3.2.1 a teda vieme vypočítať počet takýchto riešení ako $\binom{13}{2}$.

Podobne napríklad pre $A_1 \cap A_2$ by sme dostali nové premenné $y_1 = x_1 - 4$, $y_2 = x_2 - 7$, $y_3 = x_3$, čo vedie k hľadaniu počtu riešení $y_1 + y_2 + y_3 = 4$ v nezáporných celých číslach.

Môžeme si všimnúť, že niektoré z prienikov budú prázdne. Napríklad všetky trojice z $A_2 \cap A_3$ spĺňajú $x_1 + x_2 + x_3 \geq 0 + 7 + 13 = 20$, teda nemôžu dať súčet 15.

Dostaneme teda:

$$|X| = \binom{17}{2}$$

$$|A_1| = \binom{13}{2}$$

$$|A_2| = \binom{10}{2}$$

$$|A_3| = \binom{4}{2}$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{6}{2}$$

$$|A_1 \cap A_3| = 0$$

$$|A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

a teda

$$\begin{aligned} |S| &= \binom{17}{2} - \binom{13}{2} - \binom{10}{2} - \binom{4}{2} + \binom{6}{2} \\ &= 136 - 78 - 45 - 6 + 15 \\ &= 22 \end{aligned}$$

Čísla zadané v tejto úlohe sú dosť malé na to, že zvládneme aj vyskúšať všetky možnosti:

$$\begin{array}{cccc} 0 + 3 + 12 & 0 + 4 + 11 & 0 + 5 + 10 & 0 + 6 + 9 \\ 1 + 2 + 12 & 1 + 3 + 11 & 1 + 4 + 10 & 1 + 5 + 9 \\ 1 + 6 + 8 & 2 + 1 + 12 & 2 + 2 + 11 & 2 + 3 + 10 \\ 2 + 4 + 9 & 2 + 5 + 8 & 2 + 6 + 7 & 3 + 0 + 12 \\ 3 + 1 + 11 & 3 + 2 + 10 & 3 + 3 + 9 & 3 + 4 + 8 \\ 3 + 5 + 7 & 3 + 6 + 6 & & \end{array}$$

Vyskúšajme ešte jeden pomerne malý príklad – aby sme na ňom mohli ilustrovať myšlienku, ktorá *niekedy* pomôže.

Príklad 5.6.2. [R, Example 8.6.1] Aký je počet celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

takých, že platí $0 \leq x_1 \leq 3$, $0 \leq x_2 \leq 4$ a $0 \leq x_3 \leq 6$?

Aj v tejto úlohe je počet riešení natoľko malý, že by sme zvládli aj vypísať všetky možnosti:

$$11 = 1 + 4 + 6$$

$$11 = 2 + 3 + 6$$

$$11 = 2 + 4 + 5$$

$$11 = 3 + 2 + 6$$

$$11 = 3 + 3 + 5$$

$$11 = 3 + 4 + 3$$

Rozmyslite si, že sme tu skutočne nijaké riešenie nevynechali.

Skúsme najprv vyriešiť tento príklad takým istým spôsobom, aký sme už spomenuli vyššie.

Riešenie pomocou PIE. Vlastne chceme vypočítať $|X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|$ pre

$$\begin{aligned} X &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 11, x_i \geq 0\} \\ A_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_i \geq 0, x_1 \geq 4\} \\ A_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_i \geq 0, x_2 \geq 5\} \\ A_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_i \geq 0, x_3 \geq 7\} \end{aligned}$$

Môžeme si všimnúť, že $|A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$, keďže pre riešenia patriace do $A_2 \cap A_3$ máme $x_2 + x_3 \geq 12$.

Počty prvkov všetkých množín, ktoré potrebujeme pri použití vety 5.1.1 vieme opäť spočítať štandardným spôsobom:

$$\begin{aligned} |X| &= \binom{13}{2} \\ |A_1| &= \binom{9}{2} \\ |A_2| &= \binom{8}{2} \\ |A_3| &= \binom{6}{2} \\ |A_1 \cap A_2| &= \binom{4}{2} \\ |A_1 \cap A_3| &= \binom{2}{2} \end{aligned}$$

a teda počet riešení je

$$\begin{aligned} |X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| &= \binom{13}{2} - \binom{9}{2} - \binom{8}{2} - \binom{6}{2} + \binom{4}{2} + \binom{2}{2} \\ &= 78 - 36 - 28 - 15 + 6 + 1 = 6 \end{aligned}$$

□

Uvedeným postupom sme dostali teda, že existuje šesť riešení – čo súhlasí s tým, že sme vypisovaním dostali práve šesť možností. Skúsme sa pozrieť ešte na iné trochu trikové riešenie.

Riešenie. Pozeráme sa na celočíselné riešenia

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

také, že $0 \leq x_1 \leq 3$, $0 \leq x_2 \leq 4$ a $0 \leq x_3 \leq 6$. Ak si zavedieme nové premenné

$$\begin{aligned} y_1 &= 3 - x_1 \\ y_2 &= 4 - x_2 \\ y_3 &= 6 - x_3 \end{aligned}$$

tak aj $y_{1,2,3}$ sú celé čísla a máme tie rovnaké obmedzenia $0 \leq y_1 \leq 3$, $0 \leq y_2 \leq 4$ a $0 \leq y_3 \leq 6$. Ako vyzerá zodpovedajúca rovnica pre neznáme y_1, y_2, y_3 ?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 11 \\ (3 - x_1) + (4 - x_2) + (6 - x_3) &= 13 - 11 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 2 \end{aligned}$$

Dostali sme rovnicu toho istého typu ale s inou pravou stranou. Teraz ale máme výhodu, že nevyhnutne všetky riešenia spĺňajú $y_i \leq 2$. (Máme totiž $y_1 \leq y_1 + y_2 + y_3 = 2$, podobne pre ostatné dve premenné.)

Takže vlastne horné ohraničenia $y_1 \leq 3$, $y_2 \leq 4$, $y_3 \leq 6$ si nemusíme všímať – sú nevyhnutne splnené pre každú trojicu (y_1, y_2, y_3) vyhovujúcu tejto rovnici. Teda stačí použiť tvrdenie 3.2.1, ktoré hovorí o riešeniach takých, že $y_i \geq 0$. Dostaneme, že máme práve

$$\binom{4}{2} = 6.$$

□

Pokiaľ sú podmienky na všetky premenné rovnaké, tak nám trochu roboty ušetrí to, že dostaneme rovnaký počet prieniky dvojíc množín, trojíc množín, atď (poznámka 5.2.2).

{riespie:PRIKLPIESYM}

Príklad 5.6.3. Koľko existuje štvoric celých čísel takých, že platí

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$$

a súčasne $0 \leq x_i \leq 10$.

Riešenie. Opäť chceme aplikovať PIE, pričom máme:

$$\begin{aligned} X &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4; x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\} \\ A_i &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in X; x_i \leq 10\} \end{aligned}$$

Pre počty prvkov jednotlivých množín máme:

$$\begin{aligned} |X| &= \binom{35}{3} \\ |A_i| &= \binom{24}{3} \\ |A_{i_1} \cap A_{i_2}| &= \binom{13}{3} \\ |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| &= 0 \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| &= 0 \end{aligned}$$

A teda pre počet riešení dostaneme

$$\begin{aligned} |S| &= |X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| \\ &= \binom{35}{3} - \binom{4}{1} \binom{24}{3} + \binom{4}{2} \binom{13}{3} \\ &= \frac{35 \cdot 34 \cdot 33}{6} - \frac{4 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{6} + \frac{6 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{6} \\ &= 11(35 \cdot 17 - 32 \cdot 23 + 13 \cdot 12) \\ &= 11(595 - 736 + 156) = 11 \cdot 15 = 165 \end{aligned}$$

□

Môžeme si všimnúť, že aj v tejto úlohe funguje trik z príkladu 5.6.2. Po substitúcii $y_i = 10 - x_i$ dostaneme

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 8,$$

pričom obmedzenia $0 \leq y_i \leq 10$ sú už teraz redundantné. Teda počet riešení môžeme jednoducho vyjadriť ako

$$\binom{8+3}{3} = \binom{11}{3} = 165.$$

Takto sa teda dostaneme k riešeniu oveľa rýchlejšie – chceli sme však uviesť aj riešenie bez tohto triku, ako ešte jednu ilustráciu použitia PIE; v tomto prípade so symetrickými podmienkami.

Cvičenia

Úloha 5.6.1. [B, 2.21] Kolko existuje celočíselných riešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ takých, že $1 \leq x_1 \leq 3$, $2 \leq x_2 \leq 4$, $3 \leq x_3 \leq 5$, $4 \leq x_4 \leq 6$?

Úloha 5.6.2. Kolko existuje celočíselných riešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 26$ takých, že $2 \leq x_i \leq 7$ pre $i = 1, 2, 3, 4$?

Úloha 5.6.3.

Úloha 5.6.4. Kolko existuje celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$$

takých, že $2 \leq x_1 \leq 4$, $3 \leq x_2 \leq 6$, $4 \leq x_3 \leq 6$, $x_4 \geq 2$.

Úloha 5.6.5. Kolko existuje celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 28$$

takých, že $3 \leq x_1 \leq 9$, $0 \leq x_2 \leq 8$, $7 \leq x_3 \leq 17$.

Úloha 5.6.6. Kolko existuje čísel menších než tisíc, pre ktoré je ciferný súčet rovný 14.

Kapitola 6

Stirlingove, Catalanove a iné čísla

6.1 Počet rozkladov – Stirlingove a Bellove čísla

{rozklad:SECT}

Na rôznych predmetoch sme sa videli, že relácie ekvivalencie a rozklady množín sú pomerne dôležité pojmy. Môžeme sa pýtať kombinatorickú otázku koľko existuje rôznych rozkladov (resp. relácií ekvivalencie) existuje na n -prvkovej množine. Uvidíme, že viaceré zaujímavé veci budeme vedieť povedať, aj ak budeme počítat počet rozkladov, ktoré majú práve k tried.

Pripomeňme, že pod rozkladom množiny X rozumieme to, že $X = \bigcup \mathcal{R}$, pričom:

- Každá množina $A \in \mathcal{R}$ je neprázdna.
- Tieto množiny sú po dvoch disjunktné, t.j. pre $A, B \in \mathcal{R}$ platí

$$A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Definícia 6.1.1. Počet rozkladov množiny $\{1, \dots, n\}$ označujeme B_n a voláme *Bellove číslo*.

Počet rozkladov množiny $\{1, \dots, n\}$, ktoré majú práve k -tried budeme označovať $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ alebo $S(n, k)$ a nazývať *Stirlingove číslo druhého druhu*.

Názov Stirlingove čísla *druhého druhu* napovedá, že existujú aj Stirlingove čísla prvého druhu. Tie spomenieme neskôr.

Je zrejmé, že platí:

$$B_n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}. \quad (6.1) \quad \text{{rozklad:EQBELLSUM}}$$

Poznámka 6.1.2. Vďaka tomu, že existuje prirodzený vzťah medzi surjektívnymi zobrazeniami a rozkladmi¹

{rozklad:POZNSURJ}

$$k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \text{Sur}(n, k).$$

Konkrétne pre každé surjektívne zobrazenie $f: A \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ nám $\{f^{-1}((i)); i = 1, \dots, k\}$ dá nejaký rozklad množiny A na k množiny. A súčasne každý rozklad zodpovedá práve $k!$ surjekciám, lebo mám práve $k!$ možností ako priradiť jednotlivým triedam rozkladu prvky $1, 2, \dots, k$. (T.j. mám práve $k!$ možností ako môžem triedy rozkladu usporiadať.)

Dá sa na to pozrieť aj tak, že počet surjekcií je to isté ako počet *usporiadaných* rozkladov.

¹Pozri aj <https://msleziak.com/forum/viewtopic.php?t=1730>.

6.1.1 Stirlingove čísla druhého druhu

{rozklad:SSEC}

Nie je ťažké si uvedomiť, že platí

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1 \text{ a } \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1$$

a súčasne $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0$ ak $k > n$.

Aj pre Stirlingove čísla máme

{rozklad:EQSTIRREKUR}

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} = k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\} \quad (6.2)$$

resp. $S(n+1, k) = kS(n, k) + S(n, k-1)$. (Jej odvodenie sme ponechali ako cvičenie – úloha 6.1.2.)

Pre malé n a k by sme vedeli vypísať hodnoty $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ aj skúšaním jednotlivých možností – keď máme k dispozícii rekurenciu (6.2), tak je to ešte o kúsok jednoduchšie, na základe prípadov $k = 1$ a $k = n$ vieme dopočítať ostatné hodnoty.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
7	0	1	63	301	350	140	21	1

Na základe toho vieme vyjadriť aj hodnoty B_n pre malé n .

Cvičenia

Úloha 6.1.1. Čomu sa rovná $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\}$ v závislosti od n ?

{rozkladcvic:ULOREK}

Úloha 6.1.2. Ukážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$ platí vzťah (6.2), t.j.

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} = k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\}.$$

Úloha 6.1.3. Ukážte, že $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1 = \frac{2^n - 2}{2}$. (Pokúste sa aj o nejaký dôkaz priamo z definície, bez použitia rekurencie (6.2).)

6.2 Catalanove čísla

TODO počet uzátvorkovaní, počet binárnych stromov

TODO rekurencia

$$C_0 = 1$$

{catalan:EQREKUR}

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} \quad (6.3)$$

{catalan:EQBINOM}

$$C_n = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n} \quad (6.4)$$

Kapitola 7

Fibonacciho čísla

7.1 Definícia Fibonacciho a Lucasových čísel

$$F_0 = 0, F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{7.1} \text{ {fibdef:EQFIB}}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
F_n	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181

Pri niektorých úvahách sa nám bude hodiť pracovať nie iba s Fibonacciho číslami, ale aj s inými postupnosťami reálnych (či komplexných) čísel, ktoré spĺňajú tú istú rekurenciu:

$$A_{n+2} = A_{n+1} + A_n \tag{7.2} \text{ {fibdef:EQREK}}$$

Samozrejme, aj tu platí, že ak si zvolíme hodnoty A_0 a A_1 , tak sú jednoznačne určené aj všetky ďalšie hodnoty A_n pre $n \in \mathbb{N}_0$.

Lucasove čísla

{fibdef:POZNNEG}

Poznámka 7.1.1.

Cvičenia

{fibdefcvic:ULONEG}

Úloha 7.1.1. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $F_{-n} = (-1)^n F_n$.

7.2 Fibonacciho čísla a matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \tag{7.3} \text{ {fibmat:EQMAT}}$$

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} A_1 \\ A_0 \end{pmatrix} \tag{7.4} \text{ {fibmat:EQMATREK}}$$

$$A^2 = A + I$$

7.3 Základné vlastnosti Fibonacciho čísel

Pozrieme sa na vyjadrenie F_n pomocou koreňov rovnice $x^2 - x - 1 = 0$, t.j. pomocou čísel:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Číslo φ je veľmi známe – nazýva sa *zlatý rez* a veľmi pravdepodobne ste sa s ním na rôznych miestach už stretli a ešte aj stretnete.

Keďže s týmito číslami budeme rôzne veci počítat, nie je zlé si uvedomiť, že platí:

$$\varphi + \psi = 1$$

$$\varphi - \psi = \sqrt{5}$$

$$\varphi \cdot \psi = -1$$

{fib:TVRBINET}

Tvrdenie 7.3.1. *Pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}_0$ platí:*

{fib:EQBINET}

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \quad (7.5)$$

Uvedené tvrdenie môžeme overiť matematickou indukciou. Neskôr sa pozrieme aj na to, že by sme na tento vzťah vedeli prísť aj bez toho, aby nám niekto prezradil vyjadrenie na pravej strane uvedenej rovnosti. Ak však máme zadanú rovnosť, ktorú sa snažíme dokazovať, tak dôkaz matematickou indukciou je priamočiary.

Dôkaz.

□

{fib:EQLIM}

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (7.6)$$

7.4 Kombinatorická interpretácia Fibonacciho čísel

TODO dláždenia

To isté môžeme samozrejme povedať aj tak, že počítame, koľkými spôsobmi vieme napísať dané číslo n v tvare

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k,$$

pričom $x_i \in \{1, 2\}$. Na rozdiel od typu úlohy, aký sme riešili v časti 5.6, tu k nie je pevne zvolené ale môže byť ľubovoľné.

Opět sa dá vyskúšať si to pre malé hodnoty n .

n	1	2	3	4	5	6
F_{n+1}	1	2	3	5	8	13
	1	1+1 2	1+1+1 2+1 1+2	1+1+1+1 2+1+1 1+2+1 1+1+2 2+2	1+1+1+1+1 2+1+1+1 1+2+1+1 1+1+2+1 2+2+1 1+1+1+2 2+1+2 1+2+2	1+1+1+1+1+1 2+1+1+1+1 1+2+1+1+1 1+1+2+1+1 2+2+1+1 1+1+1+2+1 2+1+2+1 1+2+2+1 1+1+1+1+2 2+1+1+2 1+2+1+2 1+1+2+2 2+2+2

7.5 Sumy s Fibonacciho číslami

7.5.1 Sumy obsahujúce Fibonacciho čísla

$$S_n = \sum_{k=0}^n F_k$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
S_n	0	1	2	4	7	12	20	33	54	88

$$\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1 \tag{7.7} \text{ {fibsum:EQSUM}}$$

7.5.2 Fibonacciho čísla a binomické koeficienty

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-k}{k} \tag{7.8} \text{ {EQFIBSUMBINOM}}$$

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots$$

Túto sumu sme síce zapísali ako nekonečnú sumu – ale od istého miesta už platí $k > n - k$ a teda nenulových sčítancov máme iba konečne veľa. (Opäť využívame konvenciu, ktorú sme už viackrát spomenuli a občas sa aj ukázala ako užitočná – pozri poznámku 2.1.6.)

Pozrime sa na to, čo dostaneme pre niekoľko malých hodnôt n :

$$\binom{0}{0} = 1 = F_1$$

$$\binom{1}{0} = 1 = F_2$$

$$\binom{2}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 = F_3$$

$$\binom{3}{0} + \binom{2}{1} = 1 + 2 = 3 = F_4$$

$$\binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 1 + 3 + 1 = 5 = F_5$$

$$\binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 1 + 4 + 3 = 8 = F_6$$

$$\binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 5 + 6 + 1 = 13 = F_7$$

$$\binom{7}{0} + \binom{6}{1} + \binom{5}{2} + \binom{4}{3} = 1 + 6 + 10 + 4 = 21 = F_8$$

7.6 Fibonacciho čísla a deliteľnosť

Kapitola 8

Jednoduché rekurencie

8.1 Lineárne homogénne rekurencie s konštantnými koeficientami

Budeme sa teda zaoberať postupnosťami, ktoré sú určené podmienkou tvaru

$$A_n = c_{k-1}A_{n-1} + c_{k-2}A_{n-2} + \cdots + c_1A_{n-k+1} + c_0A_{n-k} \quad (8.1) \quad \{\text{rekur:EQREK}\}$$

kde c_0, \dots, c_k sú nejaké zadané konštanty a $(A_n)_{n=0}^\infty$ je postupnosť určená uvedeným predpisom. Budeme predpokladať, že všetky konštanty c_k a aj členy postupnosti A_k sú komplexné čísla. Navyše predpokladáme, že $c_0 \neq 0$. (Touto podmienkou sme nič nestratili – ak by sme uvažovali rovnicu (8.1) s $c_0 = 0$, tak v nej máme posledný člen úplne zbytočne, keďže je nulový.)

Kapitola 9

Grafy

9.1 Základné pojmy

Chceme sa zaoberať grafmi – t.j. niečím podobným ako na obrázku

Tento pojem by sme mohli formalizovať napríklad takto:

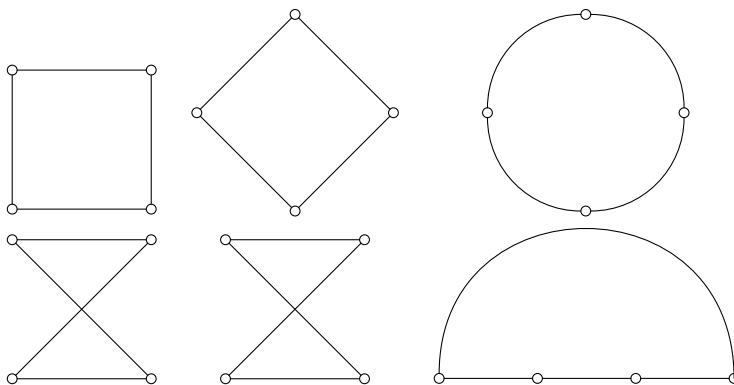
{grafdef:DEFGRAF}

Definícia 9.1.1. Nech V je konečná množina a E je nejaká množina dvojprvkových podmnožín množiny V . Potom dvojicu $G = (V, E)$ nazývame *graf*. Prvky množiny V voláme *vrcholy* a prvky množiny E voláme *hrany* grafu G .

Pre daný graf budeme označovať $V(G)$ jeho množinu vrcholov a $E(G)$ jeho množinu hrán.¹

Pretože budeme často používať množinu všetkých dvojprvkových podmnožín danej množiny V , hodí sa nám nejaké označenie pre túto množinu. Budeme v tomto texte používať označenie $V^{[2]}$, v niektorých textoch nájdete aj označenie $\binom{V}{2}$.

Azda aspoň trochu vidno, že táto formalizácia zodpovedá tomu, čo sme sa snažili znázorniť na našich obrázkoch; prvky množiny E naozaj zodpovedajú tomu, že sme vybrali, ktoré dvojice vrcholov sú spojené. Ten istý graf môžeme nakresliť rôznymi spôsobmi; môžeme rôzne poukladať vrcholy; môžeme si vybrať rôzne čiary predstavujúce hrany – jednoduchý príklad takéhoto typu je znázornený na obrázku 9.1.



{grafdef:OBRSTVORECROZNE}

Obr. 9.1: Ten istý graf nakreslený rôznymi spôsobmi

¹Z angličtiny: vertices a edges.

Ak $e = \{u, v\} \in E$, tak hovoríme, že vrchol u a hrana e sú susedné. Namiesto $\{u, v\} \in E$ budeme hrany stručnejšie zapisovať ako $uv \in E$. Ak pre dva vrcholy $u, v \in V$ platí $uv \in E$, tak hovoríme, že sú to *susedné vrcholy*. Ak $\{u, v\} \notin E$, voláme ich *nesusedné vrcholy*.

Užitočné sú aj niektoré ďalšie zovšeobecnenia. Napríklad môžeme mať medzi dvoma vrcholmi viacero hrán – dostaneme tzv. *multigrafy*. Alebo nás môže zaujímať situácia, kedy hrana má aj smer – t.j. o hrane vieme povedať nie iba to, ktoré dva vrcholy u a v spája, ale aj to, či ide z vrchola u do vrchola v alebo obrátene. Takto dostaneme *usmernené grafy*. Mohli by sme napríklad pripustiť aj hrany z nejakého vrchola do toho istého vrchola, tzv. *slučky*. Zatiaľ sa však zaoberajme iba jednoduchou situáciou, ktorú sme zaviedli v definícii 9.1.1; t.j. hrany nie sú orientované a nemáme povolené násobné hrany ani slučky.

Iný možný smer zovšeobecnenia je, že niektoré veci sa dajú rozumne zdefinovať aj v prípade, že V je nekonečná množina. My sa budeme venovať iba konečnému prípadu.

Definícia 9.1.2. Nech $G = (V, E)$ je graf a $u \in V$. Potom počet vrcholov, ktoré sú susedné s vrcholom u *stupeň vrchola*. Budeme ho označovať $\deg(v)$ alebo niekedy aj $\deg_G(v)$. (Najmä vtedy, ak bude treba zdôrazniť, s ktorým grafom pracujeme.)

Ekvivalentne môžeme stupeň vrchola zdefinovať ako počet susedných hrán.

Môžeme si všimnúť jednu pomerne jednoduchú vlastnosť, ktorú musia spĺňať stupne vrcholov v ľubovoľnom grafe – konkrétne to, že súčet stupňov sa rovná dvojnásobku počtu hrán..

Tvrdenie 9.1.3. Nech $G = (V, E)$ je graf. Potom platí

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Dôkaz. Dvoma spôsobmi spočítame počet dvojíc (v, e) , kde $v \in e \in E$. (T.j. počet dvojíc vrchol a hrana, ktoré navzájom susedia.)

Pre každú hranu máme práve dva vrcholy. Pre každý vrchol máme práve $\deg(v)$ hrán. Teda obe strany rovnosti

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

vyjadrujú počet takýchto dvojíc. □

Z tvrdenia 9.1.3 vidíme, že súčet stupňov všetkých vrcholov grafu bude vždy párny.

Dôsledok 9.1.4. V ľubovoľnom grafe je počet vrcholov nepárneho stupňa párny.

Môžeme sa pozrieť na to, koľko najviac hrán môže obsahovať graf na nejakej množine vrcholov.

Definícia 9.1.5. Ak V má n prvkov a E obsahuje všetky dvojprvkové podmnožiny množiny V , tak graf $G = (V, E)$ nazývame *kompletný graf* na n vrcholoch a označujeme K_n .

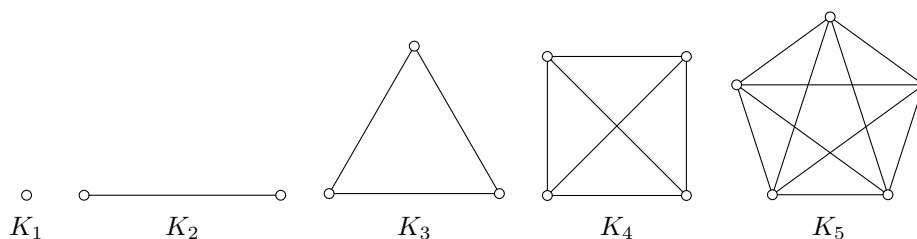
Kompletný graf K_n má n vrcholov a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ hrán.

Podobne ako pre iné štruktúry, aj pre grafy vieme povedať, kedy sú „v podstate rovnaké“.

Definícia 9.1.6. Nech $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ sú grafy a $f: V \rightarrow V'$ je zobrazenie. Zobrazenie f je *izomorfizmus grafov* ak f je bijekcia a pre ľubovoľné $u, v \in V$ platí

$$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad \{f(u), f(v)\} \in E'.$$

Dva grafy G a G' sú *izomorfné*, ak existuje izomorfizmus medzi G a G' .

Obr. 9.2: Kompletné grafy K_1 až K_5

{grafdef:FIGK}

{grafdef:DEFP}

Definícia 9.1.7. Nech $G = (V, E)$ je graf. Graf $G' = (V', E')$ sa nazýva *podgraf* grafu G ak $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$.

Ak množina E' obsahuje všetky hrany z E , ktorých koncové vrcholy ležia vo V' , tak $G = (V', E')$ je *indukovaný podgraf* alebo tiež podgraf grafu G indukovaný množinou vrcholov V' . Stručnejšie:

$$E' = E \cap V'^{[2]}.$$

Inými slovami: O podgrafe hovoríme, ak dostali graf G' takým spôsobom, že sme vybrali niektoré vrcholy $V' \subseteq V$ a niektoré spomedzi hrán medzi týmito vrcholmi. Ak sme zobrali *všetky* možné hrany grafu G , kde oba vrcholy ležia v zadanej podmnožine, tak hovoríme o indukovanom podgrafe.

Napríklad indukovaný podgraf kompletneho grafu bude opäť kompletný graf. Ale každý graf na danej n -prvkovej množine vrcholov je podgraf grafu K_n .

Definícia 9.1.8. Nech $G = (V, E)$. Potom *komplement grafu* G je graf $G = (V, E')$ taký, že

$$E' = V^{[2]} \setminus E.$$

Inými slovami, máme tú istú množinu vrcholov, ale zobrali sme práve tie hrany, ktoré pôvodný graf neobsahoval.

Cvičenia

defcvic:ULOPETERSENAUTO}

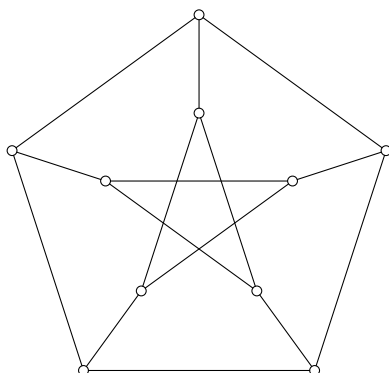
Úloha 9.1.1. Dokážte: Pre ľubovoľné 2 vrcholy u, v Petersenovho grafu (obrázok 9.3) existuje automorfizmus f Petersenovho grafu taký, že $f(u) = v$. (Názov *automorfizmus* znamená izomorfizmus grafu G s tým istým grafom G .)

cvic:ULOPETERSENMOZINY}

Úloha 9.1.2. Definujme graf G nasledovne. Nech $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Množinu vrcholov V budú tvoriť všetky dvojprvkové podmnožiny množiny M . Dva vrcholy $A, B \subseteq M$ budú spojené hranou ak $A \cap B = \emptyset$. Dokážte, že je to vlastne Petersenov graf (teda že je izomorfný s Petersenovým grafom). Vedeli by ste použiť tento popis na dôkaz toho, že

- pre ľubovoľné 2 vrcholy u a v existuje automorfizmus Petersenovho grafu taký, že $f(u) = v$,
- pre ľubovoľné 2 dvojice susedných vrcholov (u, v) a (u', v') existuje automorfizmus Petersenovho grafu také, že $f(u) = u'$ a $f(v) = v'$,
- pre ľubovoľné 2 dvojice nesusedných vrcholov (u, v) a (u', v') existuje automorfizmus Petersenovho grafu také, že $f(u) = u'$ a $f(v) = v'$.

Úloha 9.1.3. Dokážte: V každom grafe, ktorý má aspoň dva vrcholy, existujú dva (rôzne) vrcholy, ktoré majú rovnaký stupeň.



Obr. 9.3: Petersenov graf

{FIGPETERSEN}

9.2 Stromy

Vo viacerých situáciách sa nám bude hodiť pozeráť sa na rôzne postupnosti susedných vrcholov.

Definícia 9.2.1. Nech $G = (V, E)$ je graf. Postupnosť $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ kde pre $v_0, \dots, v_k \in V$ a $e_1, \dots, e_k \in E$ nazývame *sled*, ak $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ pre $i = 0, 1, \dots, k - 1$.

Sled v ktorom sa neopakujú žiadne hrany nazývame *ťah*. Sled, v ktorom sa neopakujú žiadne vrcholy nazývame *cesta*.

V definícii sledu pripúšťame aj $k = 0$, t.j. sled môže pozostávať z jediného vrcholu. Pod *dĺžkou* sledu budeme rozumiť počet hrán, ktoré sa v ňom vyskytly.

Môžeme si uvedomiť, že sled je jednoznačne určený postupnosťou vrcholov, preto často budeme používať aj stručnejšie označenie (v_0, v_1, \dots, v_k) .

Lahko si uvedomíme, že každá cesta je súčasne ťahom. (Ak sa neopakujú žiadne vrcholy, nemôžu opakovať sa opakovať ani hrany.)

Definícia 9.2.2. Ak pre sled $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ platí $v_0 = v_k$, t.j. prvý a posledný vrchol je rovnaký, nazývame ho *uzavretý sled*. Ak je uzavretý sled súčasne ťahom, voláme ho *uzavretý ťah*.

Uzavretý ťah taký, že s výnimkou prvého a posledného vrchola sa v ňom iné vrcholy už neopakujú nazývame *kružnica*.

Definícia 9.2.3. Graf $G = (V, E)$ sa nazýva *súvislý*, ak pre ľubovoľné vrcholy $u, v \in V$ existuje cesta z u do v .

Pojem súvislého grafu by sme mohli ekvivalentne definovať tak, že namiesto cesty by sme použili ťah alebo sled (úloha 9.2.1).

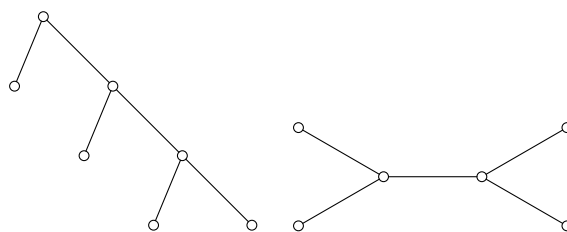
Každý graf sa dá rozdeliť na viacero súvislých grafov – tzv. komponentov súvislosti; pozri úlohy 9.2.2 a 9.2.3.

Dá sa tiež ukázať, že súvislý graf na n vrcholoch má aspoň $n - 1$ hrán (úloha 9.2.5).

Definícia 9.2.4. Súvislý graf, ktorý neobsahuje nijakú kružnicu, sa nazýva *strom*.

Graf, ktorý neobsahuje kružnice sa zvykne nazývať aj *acyklický graf*. Teda definíciu stromu môžeme sformulovať aj tak, že je to súvislý acyklický graf.

Môžeme si všimnúť nasledujúcu vlastnosť, ktorá je užitočná pri dôkazoch rozličných tvrdení o stromoch.



Obr. 9.4: Príklady stromov

{stromy:TVRST}

Tvrdenie 9.2.5. Každý strom, ktorý má aspoň dva vrcholy, má aspoň dva vrcholy stupňa 1.

Dôkaz. Nech T je strom $(\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ je najdlhšia cesta v strome T . Táto cesta obsahuje aspoň dva vrcholy.

Koncové vrcholy našej cesty v_0 a v_k majú stupeň jedna; inak by sa táto cesta dala predĺžiť. (Sporom. Nech by v_k mal ešte jedného suseda s iného než v_{k-1} . Potom s sa nerovná žiadnemu z vrcholov $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}$ – inak by sme boli schopní nájsť kružnicu. Potom $(\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, s)$ je dlhšia cesta.) \square

Vidíme teda, že v strome máme vrchol stupňa 1 (až na dve pomerne triviálne výnimky). Vo viacerých dôkazoch sa nám bude hodiť výsledok o tom, ako stromy vznikajú pridávaním vrchola stupňa 1.

{stromy:TVRPRIDAJ}

Tvrdenie 9.2.6. Nech $G = (V, E)$ je graf, ktorý obsahuje vrchol v stupňa 1. Graf G je strom práve vtedy, keď indukovaný podgraf na množine $V \setminus \{v\}$ je strom.

Dôkaz. Zaoberáme sa grafom G a podgrafom $G - v$, ktorý vznikol vynechaním vrchola v a jedinej hrany, ktorá z neho vychádza. Označme ako v' jediného suseda vrcholu v .

\Rightarrow Pretože G neobsahuje kružnice, ani podgraf $G - v$ neobsahuje kružnicu. Chceme ešte ukázať, že $G - v$ je súvislý. Ak $x, y \in V \setminus \{v\}$, tak existuje cesta z x do y v G . Súčasne táto cesta nemôže prechádzať cez v , pretože do tohto vrcholu sa dá vojsť a vyjsť z neho iba po jedinej hrane – takáto cesta by teda túto hranu obsahovala dvakrát.

\Leftarrow Pomerne ľahko zistíme, že ak $G - v$ je súvislý, tak aj graf G je súvislý. Lubovoľné dva vrcholy z $V \setminus \{v\}$ vieme spojiť cestou. Ešte chceme ukázať existenciu cesty z ľubovoľného vrchola $x \in V$ do v . Ak $x = v$, tak môžeme zobrať cestu pozostávajúcu iba z vrcholu v . Ak $x \neq v$, tak existuje cesta z x do v' , k tejto ceste nám stačí pridať jednu hranu. \square

{stromy:TVRN-1}

Tvrdenie 9.2.7. Nech T je strom, ktorý má n vrcholov. Potom T má práve $n - 1$ hrán.

Dôkaz. Matematickou indukciou vzhľadom na n .

1° Pre $n = 0, 1, 2$ môžeme vyskúšať všetky možné grafy na najviac dvoch vrcholoch.

2° Nech $n \geq 2$ a tvrdenie platí pre n . Nech T je strom, ktorý má $n + 1$ vrcholov.

Podľa tvrdenia 9.2.5 existuje nejaký vrchol v stupňa 1. Vynechaním tohto vrchola dostaneme graf $G - v$, ktorý je opäť stromom na základe tvrdenia 9.2.6. Podľa indukčného predpokladu má $G - v$ práve $n - 1$ hrán. Graf G dostaneme pridaním jedinej hrany, teda má práve n hrán. \square

{stromy:TVRN-1JESTROM}

Tvrdenie 9.2.8. Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf ktorý má n vrcholov a $n - 1$ hrán. Potom G je strom.

Dôkaz. Matematickou indukciou vzhľadom na n .

1° Pre $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ tvrdenie platí. (Lahko to skontrolujeme, ak sa pozrieme na všetky možné grafy na dvoch a menej vrcholoch.)

2° Prepokladajme, že tvrdenie platí pre $n \geq 2$. Chceme ukázať, že platí aj pre graf G s $n + 1$ vrcholmi.

Najprv ukážme, že v G existuje vrchol stupňa 1. Z tvrdenia 9.1.3 vieme, že súčet stupňov je $2|E| = 2n - 2$. Ak by všetky vrcholy mali stupeň aspoň 2, tak by súčet stupňov bol $\geq 2n$. Teda existuje aspoň jeden vrchol stupňa menšieho než dva; nejaký taký vrchol si označme v . Tento vrchol nemôže mať stupeň 0, pretože potom by graf G nebol súvislý. Máme teda $\deg(v) = 1$.

Podľa tvrdenia 9.2.6 nám stačí ukázať, že vynechaním vrchola v dostaneme strom. To vyplýva z indukčného predpokladu \square

Keďže každý súvislý graf má aspoň $n - 1$ hrán (úloha 9.2.5), predchádzajúce dva výsledky vlastne hovoria, že stromy sú súvislé grafy s minimálnym možným počtom hrán. Vieme pridať aj viaceré ďalšie zaujímavé charakterizácie stromov, ktoré sú zosumarizované v nasledujúcej vete.

Veta 9.2.9. *Nech $G = (V, E)$ je graf, ktorý má n vrcholov. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

- (i) G je strom.
- (ii) G je súvislý a má $n - 1$ hrán.
- (iii) Pre ľubovoľné $x, y \in V$ existuje práve jedna cesta z x do y .
- (iv) Graf G je súvislý a súčasne odstránením ľubovoľnej hrany dostaneme nesúvislý graf.
- (v) Graf G je acyklický a pridaním ľubovoľnej novej hrany dostaneme kružnicu.

{stromy:VTEKV}

{stromy:itSTROM}

{stromy:itPOCETHRAN}

{stromy:itJEDINA}

{stromy:itMINSUVIS}

{stromy:itMAXACYKL}

Podmienku (iv) môžeme popísať aj tak, že G je minimálny súvislý graf – množina hrán sa nedá zmenšiť tak, aby graf stále zostal súvislý. Podmienka (v) hovorí to, že G je maximálny acyklický graf.

Dôkaz. Ekvivalenciu medzi (i) a (ii) sme už dokázali (tvrdenia 9.2.7 a 9.2.8). Aj ostatné dôkazy budú do istej miery podobné – často budeme používať indukciu a pri niektorých implikáciách sa nám bude hodiť tvrdenie 9.2.6.

Dôkaz, že každý strom spĺňa (iv) aj (iii) sme ponechali ako cvičenie – úlohy 9.2.6 a 9.2.7. (Opäť by malo byť užitočné tvrdenie 9.2.6.) Podme sa pozrieť na obrátené implikácie – v oboch prípadoch zo zadanej podmienky vieme, že graf je súvislý; stačí nám teda ukázať neexistenciu kružníc.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Predpokladajme, že pre ľubovoľné x, y existuje jediná cesta z x do y . Chceme ukázať, že G neobsahuje kružnicu. Ak by graf G obsahoval kružnicu, tak pre ľubovoľné vrcholy ležiace na tejto kružnici by sme medzi nimi mali dve cesty – keďže po kružnici sa z x do y môžeme vybrať doma rôznymi smermi.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Predpokladajme, že G je minimálny súvislý graf. Nech by v G existovala kružnica. Vynechaním niektorej hrany tejto kružnice neporušíme súvislosť. Ak sme totiž vynechali hranu $\{x, y\}$, tak z x do y sa stále vieme dostať po zostávajúcich hranách tejto kružnice. To znamená, že aj v novom grafe ležia x a y v tom istom komponente súvislosti.

Už nám zostáva iba ukázať ekvivalenciu medzi (i) a (v).

$(i) \Rightarrow (v)$ Nech G je strom a $\{x, y\} \notin E$. Pretože v G existuje cesta z x do y , po pridaní hrany $\{x, y\}$ dostaneme spolu s touto cestou kružnicu.

$(v) \Rightarrow (i)$ Nech G je maximálny acyklický graf. Chceme dokázať, že G je súvislý. Pre ľubovoľné $x, y \in V(G)$ buď sú tieto vrcholy spojené hranou alebo pridaním hrany $\{x, y\}$

vznikne kružnica. V druhom spomenutom prípade zostávajúce vrcholy kružnice tvoria cestu v G spájajúcu x a y . \square

Cvičenia

Úloha 9.2.1. Nech $G = (V, E)$ je graf a $u, v \in V$. Ukážte, že ak existuje sled začínajúci v u a končiaci vo v , tak existuje aj cesta z u do v . (Hint: Skúste sa pozrieť na najkratší sled z u do v .)

Úloha 9.2.2. Nech $G = (V, E)$ je graf. Pre ľubovoľné dva vrcholy u, v grafu G definujme reláciu \sim na množine V tak, že $u \sim v$ práve vtedy, keď existuje cesta z u do v . Ukážte, že táto relácia je relácia ekvivalencie na množine V . Triedy ekvivalencie \sim nazývame *komponenty súvislosti* grafu G .

Úloha 9.2.3. Nech $G = (V, E)$ je ľubovoľný graf a C je niektorý jeho komponent súvislosti. Ukážte, že indukovaný podgraf na množine C je súvislý.

Úloha 9.2.4. Ukážte, že pre každý vrchol u grafu G je jeho komponent súvislosti rovný najväčšiemu indukovanému podgrafu obsahujúcemu vrchol u .

Úloha 9.2.5. Dokážte: Súvislý graf na n vrchoch má aspoň $n - 1$ hrán.

Úloha 9.2.6. Ukážte, že každý strom je minimálny súvislý graf, t.j. vynechaním ľubovoľného vrcholu vznikne nesúvislý graf. (Hint: Dá sa použiť tvrdenie 9.2.6.)

Úloha 9.2.7. Ukážte, že ak T je strom, tak pre ľubovoľné dva vrcholy $x, y \in V(T)$ existuje práve jedna cesta z x do y . (Hint: Dá sa použiť tvrdenie 9.2.6.)

Úloha 9.2.8. Dokážte: Graf $G = (V, E)$ je súvislý práve vtedy, keď pre každý rozklad množiny vrcholov $V = V_1 \cup V_2$ na dve neprázdne disjunktné množiny existuje hrana spájajúca nejaký vrchol z V_1 s nejakým vrcholom z V_2 .

Úloha 9.2.9. [K, Cvičenie 9.4] Dokážte, že ak graf na n vrchoch má aspoň $\binom{n-1}{2} + 1$ hrán, tak je súvislý. Ukážte na príklade, že $\binom{n-1}{2}$ hrán nestačí.

Úloha 9.2.10. Nech P_1 a P_2 sú dve cesty maximálnej možnej dĺžky v súvislom grafe G . Dokážte, že P_1 a P_2 majú spoločný vrchol. Musia mať spoločnú hranu?

Úloha 9.2.11. Nájdite v Petersenovom grafe kružnice dĺžok 5, 6, 8 a 9. Ukážte, že v tomto grafe nie sú žiadne kružnice dĺžok 3 ani 4.

9.3 Planárne grafy

9.3.1 Eulerova formula

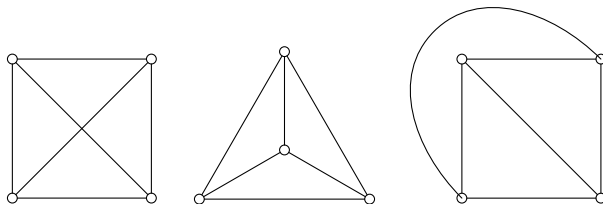
V tejto časti sa chceme pozrieť na také grafy, ktoré sa dajú „pekne“ nakresliť v rovine.

Definícia 9.3.1. Graf sa nazýva *planárny graf* alebo *rovinný graf* ak je možné nakresliť graf v rovine takým spôsobom, že sa v tomto nakreslení nijaké dve hrany nepretínajú.

Takáto definícia nie je veľmi presná, pretože sme poriadne nepovedali, čo rozumieme pod termínom *rovinné nakreslenie* grafu. Ale aspoň individuálne by mohla byť jasná predstava, že chceme nejakému každému vrcholu v grafe priradiť nejaký bod roviny a hranám priradiť nejaké krivky v rovine. O nich máme aspoň nejakú intuitívnu predstavu – a formálne by sme krivky definovali ako spojité funkcie z uzavretého intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ do \mathbb{R}^2 . Na tomto mieste sa však uspokojíme s intuitívnou predstavou o krivkách a kreslení grafov.

planar:PRIKLK4}

Príklad 9.3.2. Kompletný graf K_4 je planárny – aj keď nie každý spôsob nakreslenia bude taký, že sa hrany nebudú pretínať. Je asi do istej miery vec vkusu, ktorý spôsob nakreslenia grafu K_4 z obrázku 9.5 sa zdá byť najprirodzenejší, resp. ktorý by sme vyskúšali nakresliť ako prvý. Ale určite po chvíli skúšania by sme našli nejaké rovinné nakreslenia – na uvedenom obrázku sú dve rovinné nakreslenia, prvý spôsob je taký, že sa v ňom hrany pretínajú.

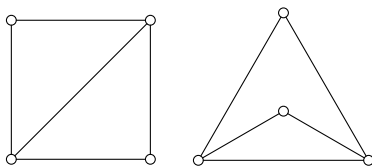
Obr. 9.5: Graf K_4 nakreslený rôznymi spôsobmi

{planar:FIGK4}

Na geometrickú intuíciu sa ale budeme spoliehať najmä pri pojme steny, o ktorom chceme niečo teraz povedať. Máme teda graf nejaký nakreslený v rovine, tým sú teda určené nejaké body zodpovedajúce vrcholom a nejaké vrcholy zodpovedajúce hranám. Takéto nakreslenie rozdelí rovinu na niekoľko oblastí medzi ktorými sa nedá prechádzať bez toho, aby sme prešli cez niektorú hranu. Tieto oblasti budeme nazývať *stenami*.

Hoci takéto niečo vyzerá intuitívne pomerne zrejme, dokázať takéto tvrdenie formálne nie je vôbec úplne jednoduché. Dokázať už takú vec, že uzavretá krivka rozdelí rovinu práve na dve časti je dosť obtiažne (Jordanova veta o krivkách). Na tomto mieste sa uspokojme s tým, že máme aspoň nejakú intuitívnu predstavu o tom, ako vyzerajú oblasti, na ktoré nakreslenie nejakého grafu rozdelilo rovinu.

Možno sa oplatí ešte explicitne upozorniť na to, že medzi steny rátame aj vonkajšiu stenu. Ten istý graf môžeme nakresliť viacerými spôsobmi, v závislosti od toho aké nakreslenie si vyberieme môže vonkajšia stena pozostávať z úplne iných hrán – pozri obrázok 9.6.



Obr. 9.6: Počet hrán vonkajšej steny sa môže pri rôznych nakresleniach líšiť

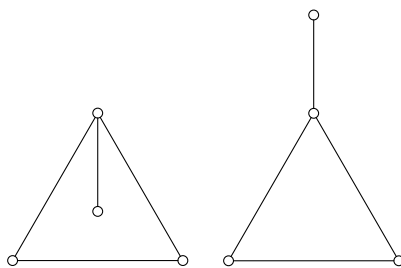
{planar:FIGVONK}

Takisto sa oplatí uvedomiť si, že sa môže stať aj to, že jednou stenou je vonkajšia stena. Ak sa obmedzíme na súvislé grafy, tak toto nastane práve pre stromy – akonáhle máme totiž v grafe nejakú kružnicu, tak tá rozdelí rovinu na dve disjunktné oblasti. (Tu vlastne využívame Jordanovu vetu o krivkách.)

Spomeňme na tomto mieste, že hrana môže ležať aj na hranici iba jednej steny. Napríklad takéto niečo dostaneme pre každý strom – tam mám iba jednu stenu. Iný príklad je na obrázku 9.7. Ak postupne prechádzam celú hranicu niektorej steny, tak takúto hranu prejdem dvakrát.

{planar:POZNGULA}

Poznámka 9.3.3. *stereografická projekcia*



Obr. 9.7: Hrana susediaca s jedinou stenou

{planar:FIGDVI}

Veta 9.3.4 (Eulerova formula). *Ak pre nejaký súvislý rovinný graf označuje v počet vrcholov, h počet hrán a s počet stien, pričom $v \geq 1$, tak platí*

{planar:VTEULI}

$$v - h + s = 2. \quad (9.1) \quad \text{{planar:EQEULI}}$$

Dôkaz. Indukciou vzhľadom na počet hrán.

1° Ak $h = 0$, tak máme jediný vrchol a jedinou stenu. Teda skutočne platí $v - h + s = 2$.

2° Nech $h \geq 1$ a tvrdenie platí pre grafy s menej než h hranami.

Ak G neobsahuje kružnicu, tak je to strom a má práve $h + 1$ vrcholov (tvrdenie 9.2.7). Súčasne v tomto prípade máme iba jednu (vonkajšiu) stenu. Teda v takomto prípade dokazované tvrdenie platí.

Zoberme si teraz prípad, že G obsahuje nejakú kružnicu a e nech je niektorá hrana patriaca tejto kružnici. Graf $G - e$, ktorý vznikne vynechaním tejto hrany, je tiež súvislý. Teda podľa indukčného predpokladu preň Eulerova formula. Ako sa zmenil počet stien vynechaním hrany?

Hrana e leží v dvoch rôznych stenách pôvodného grafu. (Tu vlastne využívame to, že krivka zodpovedajúca kružnici rozdelila rovinu práve na dve časti – Jordanovu vetu o krivkách.) A z týchto dvoch stien vynechaním hrany e vznikla jedna stena. Aplikovaním indukčného predpokladu na menší graf dostaneme

$$v - (h - 1) + (s - 1) = 2,$$

z čoho vyplýva aj dokazovaná rovnosť $v - h + s = 2$. □

Lahko sa dá zistiť, že uvedená rovnosť neplatí pre nesúvislé grafy – pre takéto grafy by sme dostali rovnosť v tvare

{planar:EQEULERNESUV}

$$v - h + s = 1 + c, \quad (9.2)$$

kde c označuje počet komponentov súvislosti (úloha 9.3.4).

To, že nejaký graf je planárny vieme ukázať napríklad tak, že sa nám podarí nájsť jeho rovinné nakreslenie. (Samozrejme, úloha nájsť vhodné nakreslenie nemusí byť jednoduchá úloha – najmä pre väčšie grafy.) Otázka je, ako dokázať, že nejaký graf nie je planárny – t.j. že neexistuje nijaké rovinné nakreslenie. Môže byť užitočné, ak budeme poznať aspoň nejaké nutné podmienky na to, aby nejaký graf bol súvislý.

{planar:VTNEROV}

Veta 9.3.5. *Ak G je planárny graf, ktorý má v vrcholov a h hrán, pričom $v \geq 3$. Potom platí*

{planar:EQNEROV}

$$h \leq 3v - 6. \quad (9.3)$$

Dôkaz. Najprv predpokladajme, že graf je súvislý. Poďme sa pozrieť na počet usporiadaných dvojíc hrana a stena, ktoré navzájom susedia.

Každá hrana patrí práve dvom stenám (prípadne dvakrát tej istej stene), teda takýchto dvojíc je práve $2h$.

Ak $v \geq 3$, tak každá stena je ohraničená aspoň tromi hranami – úloha 9.3.5. (Opäť tu započítavame hranu dvakrát ak sa vyskytne na hranici niektorej steny viac ako raz.) To znamená, že takýchto dvojíc je aspoň $3s$.

Dostaneme teda:

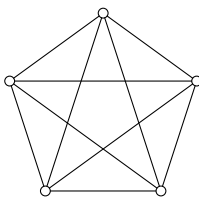
$$\begin{aligned} 3s &\leq 2h \\ 3(2 + h - v) &\leq 2h \\ h &\leq 3v - 6 \end{aligned}$$

Zatiaľ sme dokázali uvedenú nerovnosť pre súvislé grafy. To, že uvedená nerovnosť platí aj pre nesúvislé grafy ponecháme ako cvičenie – úloha 9.3.6. \square

{planar:DOSK5}

Dôsledok 9.3.6. Graf K_5 nie je planárny.

Dôkaz. Stačí spočítať, že pre graf K_5 máme $v = 5$, $h = \binom{5}{2} = 10$. Počet hrán je väčší než $3v - 6 = 9$, čiže graf nespĺňa nutnú podmienku (9.3). \square



Obr. 9.8: Graf K_5 nie je planárny

Tvrdenie 9.3.7. Každý rovinný graf obsahuje vrchol stupňa ≤ 5 .

{planar:TVRSTUP5}

Dôkaz. Predpokladajme, že všetky vrcholy by mali stupeň väčší než päť. Z tvrdenia 9.1.3 vieme, že

$$\sum_{i=1}^v d_i = 2h,$$

kde d_i označuje stupeň i -teho vrchola. Z $d_i \geq 6$ teda dostaneme

$$6v \leq 2h.$$

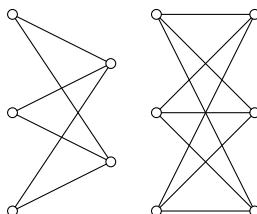
Ak porovnáme túto nerovnosť s (9.3), tak z $h \leq 3v - 6$ dostaneme

$$6v \leq 2h \leq 6v - 12,$$

čo je spor. \square

{planar:DEFKMN}

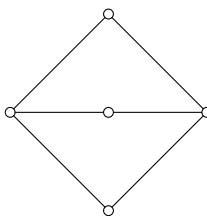
Definícia 9.3.8. Kompletný bipartitný graf $K_{m,n}$ je graf, v ktorom množina vrcholov zostáva z dvoch disjunktných častí $V = V_1 \cup V_2$, takých, že množina hrán je $E = \{\{u, v\}; u \in V_1, v \in V_2\}$, pričom $|V_1| = m$.

Obr. 9.9: Grafy $K_{3,2}$ a $K_{3,3}$

{planar:FIGK3}

Stručne: Máme m -prvkovú množinu V_1 a n -prvkovú množinu V_2 a každý vrchol z V_1 je spojený s každým vrcholom z V_2 . (A žiadne iné hrany už v tomto grafe nie sú.)

Napríklad každý graf $K_{n,2}$ je planárny – na obrázku 9.10 je rovinné nakreslenie grafu $K_{3,2}$.

Obr. 9.10: Graf $K_{3,2}$ je planárny

{planar:FIGK3}

{planar:VTNEROVKRUZ4}

Veta 9.3.9. *Nech G je planárny graf, ktorý má v vrcholov a h hrán, pričom $v \geq 3$. Ak G neobsahuje kružnicu dĺžky 3, tak platí*

{planar:EQNEROVKRUZ4}

$$h \leq 2v - 4 \quad (9.4)$$

Dôkaz. Dôkaz je podobný na dôkaz vety 9.3.5. Aj tu urobíme to, že sa obmedzíme na súvislé grafy (a prípad, keď G je nesúvislý, necháme na rozmyslenie).

Argument je takmer rovnaký – treba si ale uvedomiť, že teraz hranica každej oblasti musí obsahovať aspoň štyri hrany.

$$\begin{aligned} 4s &\leq 2h \\ 4(2 + h - v) &\leq 2h \\ 2h &\leq 4v - 8 \\ h &\leq 2v - 4 \end{aligned}$$

□

{planar:DOSK33}

Dôsledok 9.3.10. *Graf $K_{3,3}$ nie je planárny.*

Dôkaz. Graf $K_{3,3}$ neobsahuje žiadnu kružnicu dĺžky 4. Súčasne máme $v = 6$, $h = 9$. Dostaneme $2v - 4 = 8$, čiže graf nevyhovuje podmienke (9.4). □

Poznámka 9.3.11. Môžeme si všimnúť, že graf $K_{3,3}$ vyhovuje podmienke $h \leq 3v - 6$ z vety 9.3.5. Táto podmienka je teda nutná, nie však postačujúca.

Podobným spôsobom ako vety 9.3.5 a 9.3.9 môžeme nájsť ohraničenie na počet hrán vyjadrené pomocou dĺžok kružníc – keďže tie nám niečo hovoria o počte hrán ohraničujúcich steny.

Definícia 9.3.12. Nech $G = (V, E)$ je graf. *Obvod grafu*² je dĺžka najkratšej kružnice v grafe. (Ak graf neobsahuje žiadne kružnice, tak obvod položíme rovný ∞ .)

Veta 9.3.13. *Nech G je graf obsahujúci aspoň jednu kružnicu, ktorý má v vrcholov, h hrán a jeho obvod je g . Ak graf G je planárny, tak platí*

$$h \leq \frac{g(v-2)}{g-2}.$$

Pozri napríklad [J, Theorem 1.5.3].

9.3.2 $K_{3,3}$ a K_5 ako zakázané podgrafy

Spomenieme bez dôkazu – a dokonca aj bez presnej formulácie – to, že neplanárne grafy sú presne tie grafy, v ktorých sa nejakým spôsobom „skrývajú“ $K_{3,3}$ a K_5 . Takéto výsledky sú Kuratowského veta a Wagnerova veta. Oba výsledky charakterizujú planárne grafy pomocou zakázaných podgrafov resp. zakázaných minorov. V jednom prípade ide o to, že sa dá nájsť podgraf z ktorého vytvoríme $K_{3,3}$ alebo K_5 takým spôsobom, že niektoré po sebe idúce hrany môžeme pospájať do jednej hrany. V druhom prípade sa $K_{3,3}$ a K_5 nesmú vyskytnúť ako minory grafu, t.j. nedajú sa dostať tak, že niektoré susedné vrcholy zlúčime do jedného vrcholu, vynechávame hrany, vynechávame izolované vrcholy.

Dôkazy týchto viet sú pomerne náročné – ale keďže ide o veľmi známe výsledky, zdalo sa rozumné ich pri tejto téme aspoň spomenúť. (Takisto tu neuvádzame ani presnú formuláciu týchto viet a potrebných pojmov – ako napríklad pojem minor grafu.) Viac sa dá nájsť napríklad v [D, Theorem 4.4.6]. Dôkaz Kuratowského vety je napríklad aj v [H, Theorem 11.13], [CH, Theorem 5.14].

Ukážme si na tomto mieste aspoň jeden príklad ukazujúci, ako sa takýto typ úvah dá použiť pri dôkaze, že nejaký graf nie je planárny.

Príklad 9.3.14. Pozrime sa na známy *Petersenov graf*. Ukážeme, že ak by Petersenov graf bol planárny, tak by sme z jeho rovinného nakreslenia dali vyrobiť nakreslenie grafu $K_{3,3}$. Na obrázku 9.11 máme vľavo nakreslený Petersenov graf, pričom sú farebne vyznačené dve trojice vrcholov – tieto dve trojice na konci použijeme pre graf $K_{3,3}$. V prvom kroku sme graf zmenili tak, že sme vynechali dve vodorovné hrany – tým sme určite nemohli pokaziť planaritu.

Všimnime si, že takto v grafe vznikli štyri vrcholy stupňa 2. Dvojice hrán prechádzajúce vrcholmi stupňa 2 sme nahradili jednou hranou a vrcholy stupňa 2 sme vynechali – takto sme dostali tretí obrázok. (Alebo obrátene z obrázka vpravo dostaneme stredný obrázok tak, niektoré hrany prerušíme tým, že ich rozdelíme na dve hrany a medzi nimi bude vrchol stupňa 2.) Opäť si nie je ťažké uvedomiť, že ani takéto zmeny neovplyvnia, či je graf planárny.

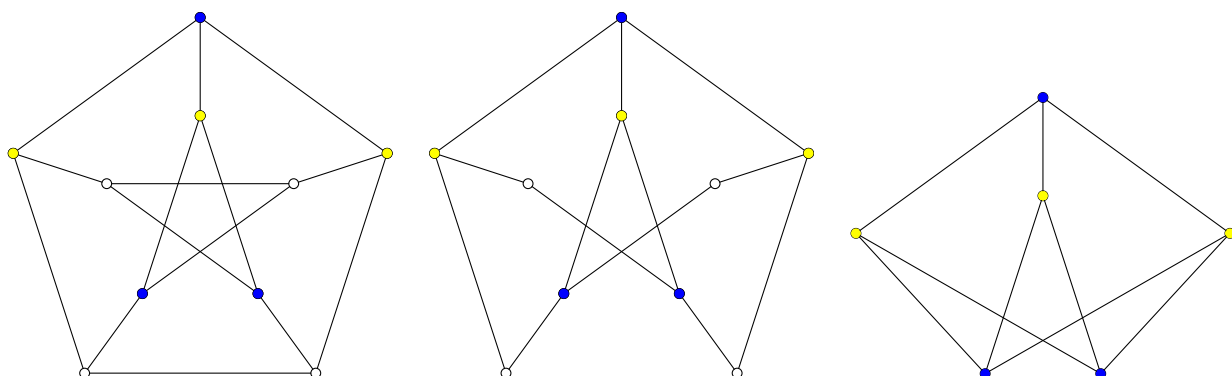
Ale na poslednom obrázku je každý z trojice modrých vrcholov spojený s každým žltým vrcholom – teda je to graf $K_{3,3}$.

Teda z planarity Petersenovho grafu by vyplývala planarita grafu $K_{3,3}$. V dôsledku 9.3.10 sme už ukázali, že $K_{3,3}$ nie je planárny, čiže ani Petersenov graf nemôže byť planárny.

Súčasne tento postup slúži ako ilustrácia Kuratowského vety – Petersenov graf má podgraf, ktorý sa dá z grafu $K_{3,3}$ dostať iba pridávaním vrcholov stupňa 2 do niektorých hrán.

To, že Petersenov graf nie je planárny, by sme vedeli odvodiť aj inak – úloha 9.3.14.

²V angličtine *girth*.



Obr. 9.11: Petersenov graf nie je planárny

{planar:FIGPE

9.3.3 Pravidelné rovinné grafy a platónske telesá

Chceme sa teraz pozrieť na dva navzájom súvisiace problémy – my sa pozrieme na to, čo vieme na ne povedať ak sa na túto úlohu pozeráme cez grafy:

- Chceli by sme nájsť súvislé planárne grafy s rovinnými nakresleniami takými, že každý vrchol má rovnaký stupeň a každá stena je ohraničená rovnakým počtom hrán.
- Chceli by sme nájsť tzv. *platónske telesá*, t.j. konvexné pravidelné mnohosteny. Teda také telesá, ako sp napríklad štvorsten alebo kocka – kde všetky steny sú rovnaké a sú to pravidelné n -uholníky.

TODO ako to súvisí s telesami

Pozrime sa na tento problém teda cez planárne grafy.

Každý vrchol má rovnaký stupeň, označme ho d . Potom platí

$$2h = vd.$$

Podobne, každá stena nech má m hrán. Opäť z toho, že každá hrana patrí práve 2 stenám, dostaneme

$$2h = ms.$$

Potom z Eulerovej formuly máme

$$\begin{aligned} 2 = v - h + s &= \frac{2h}{d} - h + \frac{2h}{m} \\ \frac{2}{h} + 1 &= \frac{2}{d} + \frac{2}{m} \\ \frac{1}{h} + \frac{1}{2} &= \frac{1}{d} + \frac{1}{m} \end{aligned}$$

Chceme nájsť všetky čísla, ktoré vyhovujú tejto rovnici. Má platiť

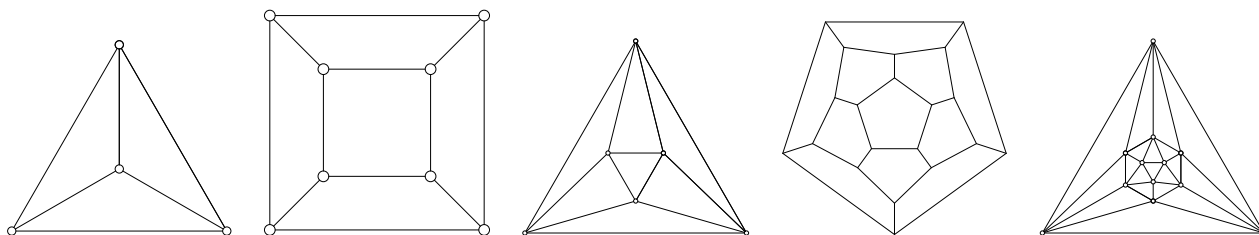
$$\frac{1}{d} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2},$$

pričom súčasne vieme, že $d \geq 3$ a $m \geq 3$.

Dostávame tieto možnosti:

d	m	h	v	s
3	3	6	4	4
3	4	12	8	6
3	5	30	20	12
4	3	12	6	8
5	3	30	12	20

Dostali sme grafy na obrázku 9.12. Zodpovedajúce telesá sú pravidelný štvorsten, kocka, pravidelný osemsten, pravidelný dvanásťsten a pravidelný dvadsaťsten.



Obr. 9.12: Grafy zodpovedajúce platónskym telesám

{planar:FIGPLATGRAFY}

Cvičenia

Úloha 9.3.1. Ukážte, že ak G je planárny graf, tak aj každý jeho podgraf je planárny.

{planarcvic:ULOPODGRAF}

Úloha 9.3.2. Ukážte, že pre $n \leq 4$ sú všetky grafy na n vrcholoch planárne.

{planarcvic:ULOMALE}

Úloha 9.3.3. Pre ktoré m, n je graf $K_{m,n}$ planárny?

{planarcvic:ULONESUVISLY}

Úloha 9.3.4. Ukážte, že graf G (nie nutne súvislý) platí rovnosť $v - h + s = 1 + c$, kde c označuje počet komponentov súvislosti.

{planarcvic:ULOTRISTENY}

Úloha 9.3.5. Zdôvodnite, že ak graf má aspoň tri vrcholy, tak s každou stenou susedia aspoň tri hrany. (Môže sa tu hodiť Jordanova veta o krivkách, ktorú sme spomenuli bez dôkazu.)

{planarcvic:ULONEROVCG}

Úloha 9.3.6. Ukážte, že pre ľubovoľné (nie nutne súvislý) graf G platí nerovnosť $h \leq 3v - 6$, t.j. nerovnosť (9.3). Dá sa odvodiť o čosi silnejšia nerovnosť, v ktorej bude vystupovať aj počet komponentov súvislosti grafu G ?

Úloha 9.3.7. Ukážte, že ak pre rovinný graf platí rovnosť $h = 3v - 6$, tak pri ľubovoľnom rovinnom nakreslení je každá stena ohraničená kružnicou dĺžky 3. (T.j. každá stena je trojuholník)

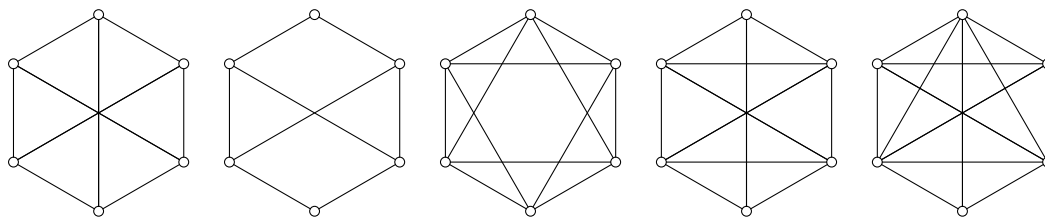
Úloha 9.3.8. Ukážte, že pre ľubovoľné $v \geq 3$ existuje rovinný graf, ktorý má práve $3v - 6$ hrán.

{planarcvic:ULOKOMPLEMEN}

Úloha 9.3.9. Nech G je graf na n vrcholoch a $n \geq 11$. Dokážte, že potom graf G alebo jeho komplement nie je planárny.

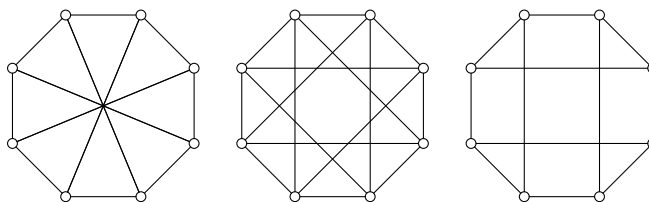
{planarcvi:ULOGRAFY6}

Úloha 9.3.10. Ktoré z nasledujúcich grafov sú rovinné? Zdôvodnite!



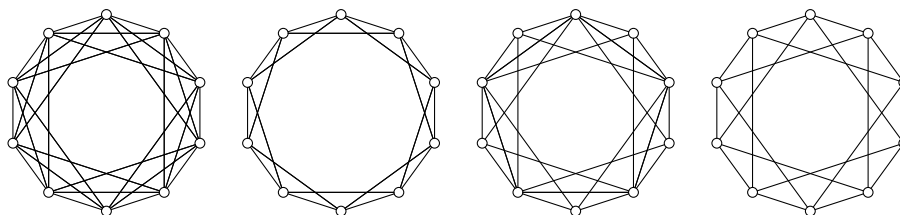
{planarcvi:ULOGRAFY8}

Úloha 9.3.11. Ktoré z nasledujúcich grafov sú rovinné? Zdôvodnite!



{planarcvi:ULOGRAFY10}

Úloha 9.3.12. Ktoré z nasledujúcich grafov sú rovinné?



Úloha 9.3.13. Ukážte, že: a) Po vynechaní ľubovoľnej hrany z K_5 dostaneme planárny graf.
b) Po vynechaní ľubovoľnej hrany z $K_{3,3}$ dostaneme planárny graf.

{planarcvic:ULOPETERSEN}

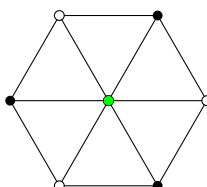
Úloha 9.3.14. Ukážte, že Petersenov graf nie je planárny, pomocou vety 9.3.13.

9.4 Farbenie grafov

Pozrieme sa v tejto časti na niektoré fakty súvisiace s farbením vrcholov grafu.

Definícia 9.4.1. Graf $G = (V, E)$ sa nazýva *k-farbitelný*, ak existuje ofarbenie vrcholov grafu k farbami také, že žiadne dva susedné vrcholy nemajú tú istú farbu.

2-farbitelný graf sa tiež nazýva *bipartitný graf* alebo *párny graf*.

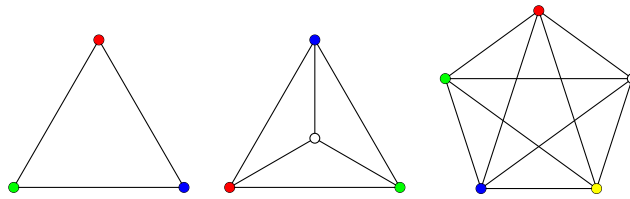


Obr. 9.13: Príklad grafu ofarbeného tromi farbami

Farbenie vrcholov grafu by sme mohli popísať aj ako zobrazenie $V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$. (Pričom máme podmienku, že pre ak $\{u, v\} \in E$ tak $f(u) \neq f(v)$.)

Iný možný pohľad je, že vrcholy máme rozdelené na k -disjunktných množín $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$, pričom sú zakázané hrany v rámci každej z uvedených množín. (Nesmú byť spojené dva vrcholy z niektorej množiny V_i .)

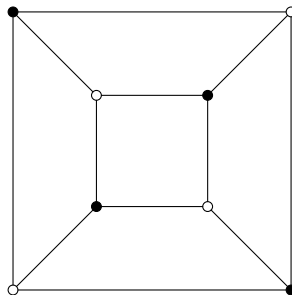
Definícia 9.4.2. Najmenšie k , pre ktoré je graf G k -farbitelný, sa nazýva *chromatické číslo* grafu G a označuje sa $\chi(G)$.

Obr. 9.14: $\chi(K_n) = n$

{farb:FIGKN}

9.4.1 Bipartitné grafy

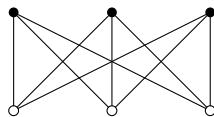
Pozrime sa najprv na grafy, ktoré sa dajú zafarbiť dvoma farbami.



Obr. 9.15: Kocka ako príklad bipartitného grafu

{farb:FIGKOCKABI}

Vlastne to znamená, že máme rozklad množiny vrcholov $V = V_1 \cup V_2$ na dve disjunktné množiny, pričom hrany sú iba nejakým vrcholom v V_1 a nejakým vrcholom z V_2 .

Obr. 9.16: Graf $K_{3,3}$ je bipartitný

{farb:FIGK33BI}

Veta 9.4.3. *Nech $G = (V, E)$ je graf. Potom G je párný graf práve vtedy, keď G neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.*

{farb:VTBIPODDCYCLES}

Dôkaz. Jedna z implikácií by mala byť pomerne zrejmá – úloha 9.4.1.

Sústredme sa na dôkaz, že ak graf neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky, tak sa dá ofarbiť dvoma farbami.

Stačí toto tvrdenie overiť pre súvislé grafy. (Každý komponent súvislosti môžeme ofarbiť zvlášť.)

Predpokladajme teda, že graf $G = (V, E)$ je súvislý. Vyberme si jeden konkrétny vrchol v_0 a pre každé $u \in V$ sa pozrieme na jeho vzdialenosť od v_0 . T.j. na číslo $d(v_0, u)$, ktoré vyjadruje dĺžku najkratšej cesty z u do v_0 .

Ofarbíme teraz vrcholy podľa parity vzdialenosti od v_0 . T.j. vrcholy, kde vzdialenosť od v_0 je párna ofarbíme jednou farbou a druhou farbou tie vrcholy, pre ktoré je vzdialenosť od v_0 nepárna.

Ukážeme, že neexistuje hrana medzi dvoma vrcholmi rovnakej farby.

Nech by existovala hrana medzi vrcholmi v a w takými, že $d(v_0, v)$ aj $d(v_0, w)$ majú rovnakú paritu. Nech $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k = v)$ a $(v_0, w_1, w_2, \dots, w_l = w)$ sú cesty najkratšej novej dĺžky z v_0 do v resp. do w . Nech x je posledný vrchol, ktorý patrí do oboch týchto ciest.

Pretože sme použili najkratšie cesty, aj úseky $(v_0, v_1, \dots, v_i = x)$ a $(v_0, w_1, \dots, w_j = x)$ sú najkratšie cesty z v_0 do x . Znamená to teda, že tieto úseky majú rovnakú dĺžku s .

Teda dĺžky zostávajúcich úsekov $(x = v_i, v_{i+1}, \dots, v_k = v)$ a $(x = w_j, w_{j+1}, \dots, w_l = w)$ majú rovnakú paritu. Navyše tieto dve cesty už nemajú spoločné vrcholy (a teda ani hrany). Keby existovala hrana medzi v a w tak by sme s jej použitím z týchto dvoch úsekov vedeli dostať kružnicu nepárnej dĺžky. (Kružnica pozostáva z tejto hrany a z dvoch úsekov dĺžky s , spolu má $2s + 1$ hrán.) \square

9.4.2 Veta o piatich farbách

Pozrieme sa trochu na otázku, čo sa dá povedať o farbení planárnych grafov. Najprv ukážeme, že každý planárny graf sa dá ofarbiť piatimi farbami. Podobný výsledok platí aj pre štyri farby, ale dôkaz je výrazne náročnejší – pozri poznámku 9.4.5.

[BM, Theorem 9.11], [K, Veta 10.5], [MN, Proposition 6.5]

{farb:VT5CT}

Veta 9.4.4. *Každý rovinný graf je 5-farbitelný.*

Dôkaz. Označme počet vrcholov grafu ako n , dôkaz urobíme indukciou vzhľadom na n .

1° Tvrdenie triviálne platí pre $n \leq 5$.

2° Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky grafy, ktoré majú menej než n vrcholov.

Ak G je planárny graf, tak G obsahuje vrchol stupňa nanajvýš 5 (veta 9.3.7). Vyberme si nejaký takýto vrchol a označme ho v .

Po vynechaní vrchola v dostaneme graf $G - v$, ktorý sa podľa indukčného predpokladu dá ofarbiť nanajvýš piatimi farbami.

Ak vrchol v má menej než piatich susedov, tak môžeme toto ofarbenie doplniť na ofarbenie celého grafu G tak, že vyberieme farbu nepoužitú pri žiadnom zo susedných vrcholov.

Budeme teda predpokladať, že $\deg(v) = 5$. Zoberme si nejaké rovinné nakreslenie grafu G a susedné vrcholy si označíme ako v_1, v_2, \dots, v_5 v smere pohybu hodinových ručičiek.

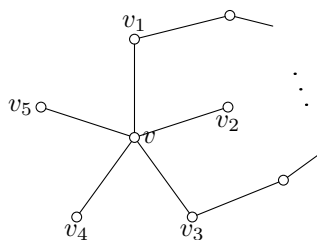
Ak v ofarbení grafu $G - v$ boli pre týchto susedov použité iba štyri farby, tak vieme doplniť ofarbenie tak, že pre v vyberieme niektorú ďalšiu farbu. Predpokladajme teda, že máme ofarbenie, v ktorom vrcholy v_1, v_2, \dots, v_5 majú rôzne farby. Naším cieľom bude ukázať, že ofarbenie grafu $G - v$ sa dá zmeniť tak, že to stále

Pozrime sa napríklad na vrcholy v_1 a v_3 . Označme si $G_{1,3}$ graf pozostávajúci iba z tých vrcholov, ktoré sú ofarbené iba farbami vrcholov v_1 a v_3 .

Uvedomme si, že ak v niektorom komponente súvislosti grafu $G_{1,3}$ navzájom vymeníme tieto dve farby, tak opäť dostaneme prípustné ofarbenie grafu $G - v$.

Ak sú teda dva vrcholy v rôznych komponentoch súvislosti, tak môžeme povymieňať farby v komponente vrchola v_3 tak, aby mal rovnakú farbu ako v_1 . Dosiachneme tým, že susedia vrchola v majú iba štyri rôzne farby – a teda sa dá nejako doplniť ofarbenie na celý graf G .

Ak existuje nejaká cesta z v_1 do v_3 v grafe $G_{1,3}$, tak uzavretá krivka určená touto cestou spolu s vrcholom v oddelí vrcholy v_2 a v_4 (obrázok 9.17). Cesta zodpovedajúca tejto krivke obsahuje iba tieto dve farby.



Obr. 9.17: Ilustrácia dôkazu vety o piatich farbách

{farb:FIG5CT}

Skúsme teraz zopakovať podobnú úvahu pre vrcholy v_2 a v_4 . Pozeráme sa graf $G_{2,4}$ pozostávajúci iba z takýchto vrcholov. Akákoľvek cesta z v_2 do v_4 v grafe $G - v$ však musí niekde preťať uzavretú krivku, ktorú sme dostali pre vrcholy v_1 a v_3 . Teda bude obsahovať aj inú farbu, nemôže celá ležať v $G_{2,4}$.

Teda komponenty vrcholov v_2 a v_4 v grafe $G_{2,4}$ sú rôzne. To znamená, že komponent súvislosti vrcholu v_2 môžeme prefarbiť tak, aby v_2 a v_4 mali rovnakú farbu. A teda sa potom takéto ofarbenie dá doplniť na ofarbenie grafu G nanajvýš piatimi farbami. \square

{farb:POZN4CT}

Poznámka 9.4.5. V skutočnosti platí silnejší výsledok – každý rovinný graf sa dá ofarbiť pomocou štyroch farieb. Dôkaz je však výrazne náročnejší.

Cvičenia

{farbcvic:ULOBIPKRUZ}

Úloha 9.4.1. Ukážte, že bipartitný graf nemôže obsahovať kružnicu nepárnej dĺžky.

9.5 Eulerovské grafy

Pozrieme sa na otázku, či sa po danom grafe dá prejsť takým spôsobom, že po každej hrane prejdeme práve raz.

TODO mosty

Definícia 9.5.1. *Eulerovský ťah* je taký ťah v grafe G , ktorý obsahuje všetky hrany grafu. *Uzavretý eulerovský ťah* je taký uzavretý ťah, ktorý obsahuje všetky hrany grafu.

Očividne, existencia uzavretého ťahu implikuje, že graf G je súvislý.

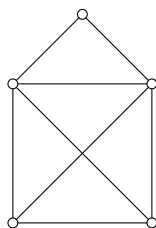
{euler:VTEULER}

Veta 9.5.2. *Súvislý graf G má uzavretý eulerovský ťah práve vtedy, keď všetky vrcholy grafu majú párny stupeň.*

Dôkaz. \Rightarrow Úloha 9.5.1.

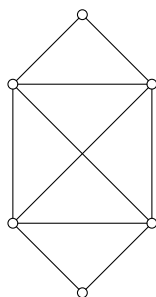
\Leftarrow TODO

\square



Obr. 9.18: Príklad grafu s eulerovským ťahom

{euler:FIGKD0}



Obr. 9.19: Príklad grafu s uzavretým eulerovským ťahom

{euler:FIGKD0}

Takýto výsledok platí aj pre grafy s násobnými hranami a slučkami (úloha 9.5.2).

Vieme dokázať podobnú vetu aj pre eulerovské ťahy, ktoré nie sú uzavreté.

{euler:VTEULER2}

Veta 9.5.3. *Nech G je súvislý graf a u, v sú dva rôzne vrcholy grafu G . V grafe G existuje eulerovský ťah začínajúci v u a končiaci vo v práve vtedy, keď vrcholy u, v majú nepárny stupeň a všetky ostatné vrcholy majú párny stupeň.*

Cvičenia

ulerovic:ULOPARNYSTUPEN}

Úloha 9.5.1. Ukážte, že ak graf G má uzavretý eulerovský ťah, tak všetky vrcholy majú párny stupeň.

{eulerovic:ULONASOBNE}

Úloha 9.5.2. Ukážte, že veta 9.5.2 platí aj ak v grafoch povolíme slučky a násobné hrany.

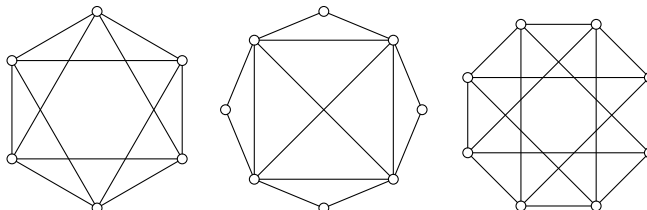
{eulerovic:ULOPLATON}

Úloha 9.5.3. Ktoré z grafov zodpovedajúcich platónskym telesám majú uzavretý eulerovský ťah (obr. 9.12)?

Úloha 9.5.4. Pre ktoré n má graf K_n uzavretý eulerovský ťah?

Pre ktoré m, n má graf $K_{m,n}$ uzavretý eulerovský ťah?

Úloha 9.5.5. Majú dané grafy (uzavretý) eulerovský ťah? Ak áno, nájdite ho.



9.6 Hamiltonovské grafy

Pre daný graf sa môžeme pýtať, či sa dá prejsť po jeho vrchoch tak, aby sme prešli všetky vrcholy.

Definícia 9.6.1. *Hamiltonovská kružnica* je kružnica, ktorá obsahuje všetky vrcholy grafu. *Hamiltonovská cesta* je cesta, ktorá obsahuje všetky vrcholy grafu.

Graf, ktorý má hamiltonovskú kružnicu, voláme *hamiltonovský*.

Problém zistiť, či pre daný graf existuje hamiltonovská cesta a nájsť ju, je z algoritmického hľadiska náročný problém. Ale pre malé grafy budeme vedieť hamiltonovské cesty (hamiltonovské kružnice) nájsť aj skúšaním. A takisto vieme povedať niektoré jednoduché nutné alebo postačujúce podmienky na to, aby existovala hamiltonovská kružnica.

9.6.1 Nutné podmienky

Tvrdenie 9.6.2. *Ak graf $G = (V, E)$ má hamiltonovskú kružnicu, tak pre každú neprázdnu podmnožinu $S \subseteq V$ platí*

$$c(G - S) \leq |S|,$$

t.j. graf, ktorý vznikne z G vynechaním k vrcholov má nanaajvýš k komponentov súvislosti.

Dôkaz. □

Tvrdenie 9.6.3. *Nech $G = (V, E)$ je párnny graf a $V = V_1 \cup V_2$ je nejaký rozklad vrcholov zodpovedajúci ofarbeniu dvoma farbami. Ak G má hamiltonovskú kružnicu, tak $|V_1| = |V_2|$.*

Dôkaz. Úloha 9.6.3. □

9.6.2 Postačujúce podmienky – Bondy–Chvátalova veta

Ukážeme si niektoré postačujúce podmienky, ktoré hovoria o existencii hamiltonovskej kružnici len na základe stupňov vrcholov grafu.

Konkrétne máme takýto výsledok – ktorý ale ukážeme o trochu neskôr ako špeciálny prípad vety 9.6.6 resp. dôsledku 9.6.7.

Veta 9.6.4 (Ore). *Nech G je graf na $n \geq 3$ vrchoch. Ak súčet stupňov ľubovoľných dvoch vrcholov, ktoré nie sú spojené hranou, je aspoň n , tak G má hamiltonovskú kružnicu.*

{hamilton:VTORE}

Z Oreho vety ľahko dostaneme ako dôsledok Diracovu vetu:

Dôsledok 9.6.5 (Dirac). *Ak v grafe na n vrchoch má každý vrchol stupeň aspoň $\frac{n}{2}$, tak G má hamiltonovskú kružnicu.*

{hamilton:DOSDIRAC}

Veta 9.6.6 (Bondy–Chvátal). *Nech G je graf s n vrcholmi. Nech u, v sú nejaké nesusedné vrcholy grafu G také, že*

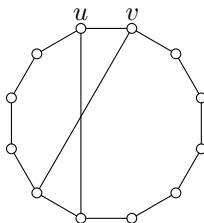
{hamilton:VTBONDYCHVATAL}

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n.$$

Označme G' graf, ktorý vznikne z grafu G pridaním hrany medzi vrcholmi u a v .

Potom graf G má hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď G' má hamiltonovskú kružnicu.

Dôkaz. TODO □



Obr. 9.20: Ilustrácia dôkazu Bondy–Chvátalovej vety

{hamilton:FIG}

Uvažujme teraz takúto konštrukciu. Ak máme nejaký graf, tak pre ľubovoľnú dvojicu nesusedných vrcholov u, v takú, že

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n,$$

pridáme medzi ne hranu. Tento postup opakujeme, kým v grafe sú nejaké takéto vrcholy. Výsledný graf nazvime *Bondy–Chvátalov uzáver* a označme ho $c(G)$.

Z vety 9.6.6 potom okamžite dostaneme:

amilton:DOSBONDYCHVATAL}

Dôsledok 9.6.7. *Graf G obsahuje hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď jeho uzáver $c(G)$ obsahuje hamiltonovskú kružnicu.*

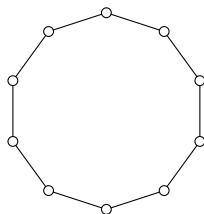
Teraz pomerne ľahko vidíme, že ako dôsledok dostávame aj Oreho vetu 9.6.4. Ak totiž pre ľubovoľné dva nesusedné vrcholy v grafe G platí $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, tak jeho uzáver je kompletý graf K_n . Pretože K_n evidentne má hamiltonovskú kružnicu, z dôsledku 9.6.7 máme, že aj G má hamiltonovskú kružnicu.

9.6.3 Petersenov graf nie je hamiltonovský

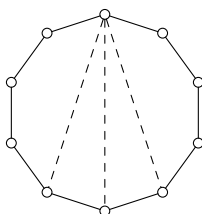
Tvrdenie 9.6.8. *Petersenov graf nemá hamiltonovskú kružnicu.*

Dôkaz. Petersenov graf má 10 vrcholov, každý z nich má stupeň 3. Všimnime si tiež, že Petersenov graf neobsahuje kružnice dĺžky tri ani štyri – úloha 9.2.11.

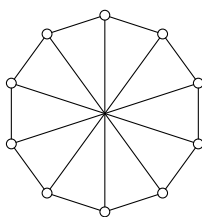
Predpokladajme, že by Petersenov graf mal hamiltonovskú kružnicu. Teda jeho vrcholy by sme nejakým spôsobom mohli nakresliť na kružnicu. Každý vrchol má mať stupeň tri – teda v každom vrchole treba pridať ešte jednu hranu.



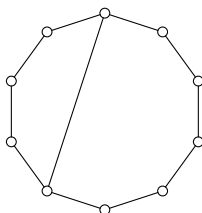
Ak si uvedomíme, že nesmie vzniknúť kružnica dĺžky tri ani štyri, tak pre ľubovoľný vrchol sú jediné možnosti vybrať si protilahlý vrchol alebo vrcholy tesne vedľa neho.



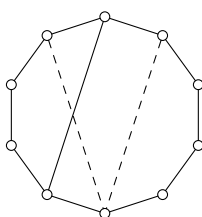
Taká možnosť, že pre každý vrchol by sme vybrali práve protilahlý vrchol nefunguje – nie je ťažké presvedčiť sa, že takýto graf nie je izomorfný s Petersenovým grafom.



Teda určite aspoň v jednom vrchole máme takúto situáciu:



Ak sa teraz pozrieme na protilahlý vrchol, tak tam nefunguje žiadna z našich troch možností. Ak by sme ho spojili s horným vrcholom, tak dostaneme vrchol stupňa štyri. A zostávajúce dve možnosti (naznačené na nasledujúcom obrázku) by vytvorili kružnice dĺžky štyri.



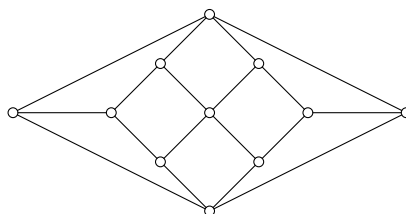
□

Cvičenia

{hamiltoncvič:ULOPLATON}

Úloha 9.6.1. Nájdite hamiltonovské kružnice pre grafy zodpovedajúce platónskym telesám (obr. 9.12).

Úloha 9.6.2. [K, Cvičenie 9.7] Dokážte, že graf na nasledujúcom obrázku nemá hamiltonovskú kružnicu. (Tento graf sa nazýva Herschelov graf.)



{hamiltoncvic:ULOPARNE}

Úloha 9.6.3. Nech graf G má hamiltonovskú kružnicu. Ukážte, ak G sa dá ofarbiť dvoma farbami, tak pri ľubovoľnom takomto ofarbení sa obe farby vyskytnú rovnako veľa krát. T.j. ak $V = V_1 \cup V_2$ je rozklad taký, že žiadna hrana grafu neleží vo V_i , $i = 1, 2$, tak $|V_1| = |V_2|$.

Úloha 9.6.4. Ukážte, že graf $K_{m,n}$ má hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď $m = n \geq 2$.

Úloha 9.6.5. Nájdite príklad grafu, ktorý má hamiltonovskú cestu, ale nemá hamiltonovskú kružnicu.

Literatúra

- [B] V. K. Balakrishnan. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Combinatorics including concepts of Graph Theory*. McGraw-Hill, New York, 1995.
- [BM] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. North-Holland, New York, 1976.
- [BQ] Arthur T. Benjamin and Jennifer J. Quinn. *Proofs that Really Count*. Mathematical Association of America, Providence, 2003. Dolciani Mathematical Expositions; no. 27.
- [Č] Juraj Činčura. Elementárna teória čísel. Poznámky k prednáške, <https://web.archive.org/web/20190713075700/http://thales.doa.fmph.uniba.sk/cincura/public/Element.teor.cisel.pdf>.
- [CH] John Clark and Derek Alan Holton. *A First Look at the Graph Theory*. World Scientific, 1991.
- [D] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Springer-Verlag, Heidelberg, 3rd edition, 2005.
- [E] Arthur Engel. *Problem Solving Strategies*. Springer, New York, 1998. Problem Books in Mathematics.
- [H] Frank Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley, 1969.
- [HKŠ] Jiří Herman, Radan Kučera, and Jaromír Šimša. *Counting and Configurations: Problems in Combinatorics, Arithmetic, and Geometry*. Springer, New York, 2003. CMS Books in Mathematics.
- [J] Dieter Jungnickel. *Graphs, Networks and Algorithms*. Springer, Berlin, 4th edition, 2013. Algorithms and Computation in Mathematics, Volume 5.
- [JJ] Gareth A. Jones and J. Mary Jones. *Elementary Number Theory*. Springer-Verlag, London, 1998. Springer Undergraduate Mathematics Series.
- [K] Martin Knor. *Kombinatorika a Teória Grafov I*. Univerzita Komenského, Bratislava, 2000.
- [L1] Loren C. Larson. *Problem solving through problems*. Springer, New York, 1983.
- [L2] Loren C. Larson. *Metódy riešenia matematických problémov*. ALFA, Bratislava, 1990.
- [Ma] David R. Mazur. *Combinatorics: A Guided Tour*. 2010. MAA Textbooks.

-
- [MI] Pavle Mladenović. *Combinatorics: A Problem-Based Approach*. Springer Nature Switzerland AG, Cham, 2019.
- [MN] Jiří Matoušek and Jaroslav Nešetřil. *Invitation to Discrete Mathematics*. Oxford University Press, New York, 2nd edition, 2002.
- [R] Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications*. McGraw-Hill, New York, 7th edition, 2012.
- [S] Martin Sleziak. Teória čísel. Poznámky k prednáške, <https://msleziak.com/vyuka>.
- [ŠHHK] T. Šalát, A. Haviar, T. Hecht, and T. Katriňák. *Algebra a teoretická aritmetika 2*. Alfa, Bratislava, 1986.
- [V] N. Ya. Vilenkin. *Combinatorics*. Academic Press, New York, 1971.

Register

- ťah, 77
 - uzavretý, 77
- Bellove číslo, 67
- binomický koeficient, 29
- cesta, 77
- charakteristická funkcia, 11
- chromatické číslo, 89
- Eulerova formula, 82
- Eulerova funkcia, 54
- eulerovský ťah, 91
 - uzavretý, 91
- funkcia
 - multiplikatívna, 56
- graf, 74
 - k -farbiteľný, 88
 - acyklický, 77
 - bipartitný, 88
 - hamiltonovský, 93
 - kompletný, 75
 - kompletný bipartitný, 83
 - párny, 88
 - Petersenov, 77
 - nie je planárny, 85
 - planárny, 80
 - rovinný, 80
 - súvislý, 77
- hamiltonovská cesta, 93
- hamiltonovská kružnica, 93
- hrana, 74
- izomorfizmus
 - grafov, 75
- kombinácie
 - s opakovaním, 23
- komplement grafu, 76
- komponent súvislosti, 80
- kružnica, 77
- Möbiova funkcia, 60
- multinomický koeficient, 22
- obvod grafu, 85
- Pascalov trojuholník, 10
- Pascalova identita, 9
- permutácia
 - bez pevného bodu, 48
- permutácie
 - s opakovaním, 22
- platónske teleso, 86
- princíp zapojenia a vypojenia, 43
- prvočíselná funkcia, 60
- sled, 77
 - uzavretý, 77
- Stirlingove číslo
 - druhého druhu, 67
- strom, 77
- stupeň vrchola, 75
- veta
 - Bondy–Chvátalova, 93
 - Diracova, 93
 - Eulerova, 58
 - Malá Fermatova, 59
 - multinomická, 42
 - Oreho, 93
- vrchol, 74
- vrcholy
 - nesusedné, 75
 - susedné, 75
- zlatý rez, 70

Zoznam symbolov

$n!$	8
$x^{\underline{k}}$	8
$\overline{x^k}$	8
$\binom{n}{k}$	8
χ_A	11
$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_n}$	22
$\binom{n}{k}$	24
$\binom{n}{k}$	29
$\varphi(n)$	54
$\mu(n)$	60
$\pi(x)$	60
B_n	67
$S(n, k)$	67
$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$	67
$V(G)$	74
$E(G)$	74
$V^{[2]}$	74
$\deg(v)$	75
$\deg_G(v)$	75
K_n	75
$K_{m,n}$	83
$\chi(G)$	89