1 Úprava algebraických výrazov

1. Upravte uvedený výrazy na čo najjednoduchší tvar:
   a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;
   b) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;
   c) $\sqrt{(-3)^2}$;
   d) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$;
2. Zjednodušte zadané výrazy. Zistite aj, pre aké hodnoty premenných sú definované.
   a) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$;
   b) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$;
   c) $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;
   d) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$; (Hint: Čo vychádza po dosadení čísla 1?)
   e) $(x+y+z)^2$;
   f) $(x+y+z)^3$;
   g) $(x+y)(y+z)(x+z)$;
   h) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$;
   i) $\dfrac{x^4-y^4}{x-y}$;
   j) $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$;
   k) $(\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2})(\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2})$;
   l) $\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}$;
   m) $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$;
   n) $\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{2(n+2)}$.
3. Čomu sa rovná x_1+x_2, $x_1\cdot x_2$, $x_1^2-x_1$ a $x_1^2-x_2^2$ pre

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

   (Číslo $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vystupujúce v tejto úlohe sa volá *zlatý rez* a dá sa s ním stretnúť v rôznych oblastiach.[1])
4. Zistite, či platí uvedená rovnosť pre ľubovoľné reálne čísla, pre ktoré má daný výraz zmysel. (Ak platí, tak sa ju pokúste zdôvodniť. Ak nie, tak nájdite aspoň jeden *konkrétny* kontrapríklad.)
   a) $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$;
   b) $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$;
   c) $\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}$;
   d) $\sqrt{a^2}=a$;
   e) $(\sqrt{a})^2=a$;
   f) $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$;
   g) $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$;

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio`

2 Sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \\ 2x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

Maticový zápis tejto sústavy:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Zápis ako súčin matice a stĺpcového vektora:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 3x - 2y &= -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 2 \\ 2x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 2 \\ 2x + 3y &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 2 \\ 2x + 3y &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 2 \\ 2x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

3 Celé čísla, deliteľnosť, indukcia

1. Dokážte matematickou indukciou, že súčin troch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný šiestimi.
2. Dokážte, že súčet tretích mocnín troch po sebe idúcich čísel je deliteľný 9.
3. Dokážte tvrdenie: Číslo n je nepárne *práve vtedy, keď* n^2 je nepárne.
4. Dokážte, že ak k a l sú párne čísla, tak aj číslo $k + l$ je párne. Je pravdivá aj obrátená implikácia?
5. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geq 2$ platí $4^n > 3^n + 2^n$.
6. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$
7. Dokážte, že $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$
8. Dokážte $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.

4 Reálne, komplexné čísla

1. Ktoré reálne čísla spĺňajú nerovnicu $|x - 2| \leq 5$.
2. Nájdite všetky reálne riešenia rovnice:
   a) $|x - 2| + |x + 2| = 4$;
   b) $|x - 2| + |x + 2| = 6$;
   c) $|x - 2| + |x + 2| = 2$.

3. Nájdite všetky reálne riešenia rovnice:
   a) $|x-2|-|x+2|=4$;
   b) $|x-2|-|x+2|=6$;
   c) $|x-2|-|x+2|=2$;
   d) $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}=3$.
4. Pre ktoré reálne číslo c má rovnica $|x^2+12x+34|=c$ práve 3 riešenia?
5. Nad reálnymi číslami rozložte na lineárne činitele mnohočlen x^3+4x^2+x-6.
6. Ako sa definuje absolútna hodnota $|x|$ reálneho (resp. komplexného) čísla x? Dokážte, že ak a, b sú komplexné čísla, tak

   $$|a+b|^2+|a-b|^2=2(|a|^2+|b|^2).$$

   Dá sa táto rovnosť nejako interpretovať aj geometricky?
7. Nech i je imaginárna jednotka. Dokážte, že $i^{n+4}=i^n$ pre každé prirodzené číslo n.
8. Pre ktoré reálne x má komplexné číslo $x+\frac{\sqrt{5}}{3}i$ absolútnu hodnotu 1.
9. Ak máme dve komplexné čísla $z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $z_2=\cos\beta+i\sin\beta$, čomu sa rovná ich súčin z_1z_2? (Moivrova veta)
10. *Vedeli by ste pomocou komplexných čísel odvodiť vzorec pre $\cos 2x$, $\sin 2x$? Dalo by sa to použiť pre $\sin 3x$, $\cos 3x$, $\sin nx$, $\cos nx$?

5 Množiny

1. Množina M pozostáva z párnych čísel väčších ako $\frac{17}{3}$ a menších ako $\frac{168}{9}$ a tiež z nepárnych kladných čísel menších ako $\frac{323}{32}$. Napíšte všetky prvky množiny M.
2. Určte prienik množín A a B, ak A je množina kladných celých čísel deliteľných troma alebo piatimi, ktoré sú menšie ako $\frac{301}{6}$ a B je množina prvočíselných deliteľov čísla 90.
3. Čomu sa rovná $A\cap B$ a $A\cup B$, ak $A=\{2n;n\in\mathbb{Z}\}$ a $B=\{3n;n\in\mathbb{Z}\}$?
4. Platí $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$ pre ľubovoľné množiny A, B?
5. Označme $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. (T.j. $A\triangle B$ je tzv. *symetrická diferencia* množín A, B; obsahuje tie prvky, ktoré patria práve do jednej z týchto dvoch množín.) Zdôvodniť, že $A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C$.

6 Rôzne

1. Rozhodnite, či sa priamka v rovine, ktorá je daná rovnicou $2x-5y=-2$ pretína s priamkou, ktorej rovnica je $2x+3y=4$.
2. Nájdite všetky možné predpisy, ktoré všetkým prvkom z množiny

   $$M=\{\left(\frac{1+3i}{1-3i}\right)^2-\left(\frac{1-3i}{1+3i}\right)^2,\frac{1}{i}+\frac{1-i}{1+i}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\}$$

   jednoznačne priradia prvky z množiny reálnych čísel patriacich do M.
3. Dokážte, že $\sqrt{2}$ aj $\sqrt{3}$ sú iracionálne čísla.
4. Dokážte, že $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ je iracionálne číslo.

1 Definícia zobrazenia

1.1. Ak $A \neq \emptyset$, nájdite všetky zobrazenia $A \to \emptyset$ a $\emptyset \to A$. Existuje zobrazenie z $\emptyset$ do $\emptyset$?

1.2. Nech M, N sú konečné množiny, M má m prvkov a N má n prvkov. Koľko existuje zobrazení množiny M do množiny N?

1.3. Nech M, N sú konečné množiny, M má m prvkov a N má n prvkov. Koľko existuje injekcií/bijekcií $M \to N$?

1.4. Nech A je konečná množina a $f \colon A \to A$ je zobrazenie. Dokážte:
a) Ak f je injekcia, tak f je bijekcia.
b) Ak f je surjekcia, tak f je bijekcia.
Ukážte na príklade, že pre nekonečné množiny tieto tvrdenia vo všeobecnosti neplatia.

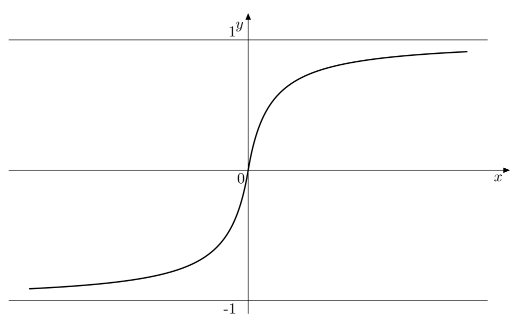
2 Skladanie zobrazení

Ak $f \colon X \to Y$ a $g \colon Y \to Z$, tak $g \circ f \colon X \to Z$ je definované ako

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & g(f(x)) \\
& f(x) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

2.1. Pre dané zobrazenia $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nájdite $f \circ g$ a $g \circ f$. Rovnajú sa tieto zložené zobrazenia? Vedeli by ste načrtnúť grafy f, g, $g \circ f$, $f \circ g$?
a) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$;
b) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$;
c) $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$;
d) $f(x) = \sqrt{|x|}$, $g(x) = x^2$;
e) $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1+x} & \text{ak } x \geq 0, \\ \frac{1}{1-x} - 1 & \text{ak } x < 0. \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \notin (-1,1), \\ \frac{1}{1-x} - 1 & \text{ak } x \in (-1,1), x \geq 0, \\ 1 - \frac{1}{1+x} & \text{ak } x \in (-1,1), x < 0 \end{cases}$



2.2. Pre dané zobrazenia $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nájdite $f \circ g$ a $g \circ f$. Rovnajú sa tieto zložené zobrazenia? ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ označuje množinu prirodzených čísel)

a) $f(n) = 2n$, $g(n) = \lceil n/2 \rceil$;

b) $f(n) = n + 1$, $g(n) = \begin{cases} n-1 & \text{ak } n \geq 2, \\ 1 & \text{ak } n = 1. \end{cases}$

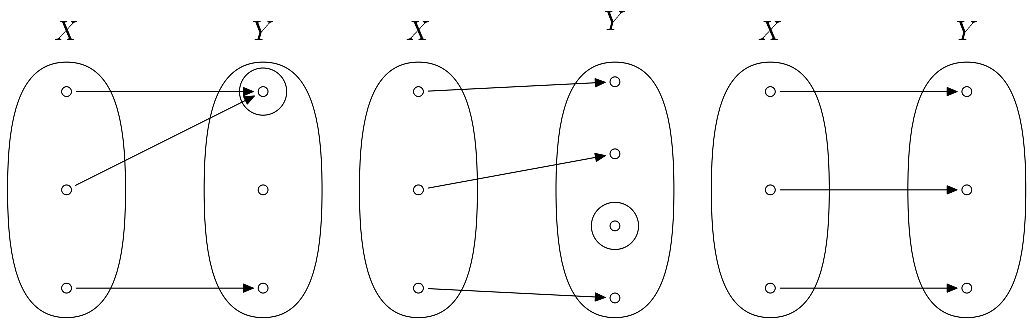
3 Injekcia, surjekcia, bijekcia

Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je

- *injekcia,* ak pre ľubovoľné $x_1, x_2 \in X$ z rovnosti $f(x_1) = f(x_2)$ vyplýva $x_1 = x_2$-
- *surjekcia,* ak pre ľubovoľné $y \in Y$ existuje $x \in X$, ktoré sa naň zobrazí.
- *bijekcia,* ak je injekcia aj surjekcia.

Dve ekvivalentné definície injekcie:

$$(\forall x_1, x_2 \in X) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$
$$(\forall x_1, x_2 \in X) x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



3.1. Dokážte: Ak $g \circ f$ je surjekcia, tak aj g je surjekcia. Platí aj opačná implikácia? Musí byť f surjekcia?
3.2. Dokážte: Ak $g \circ f$ je injekcia, tak f je injekcia.
3.3. Dokážte: Ak $g \circ f$ je bijekcia, tak f je injekcia a g je surjekcia.
3.4. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie a $X \neq \emptyset$ (t.j. X je neprázdna množina). Potom:
a) f je injekcia práve vtedy, keď existuje g také, že $g \circ f = id_X$.
b) f je surjekcia práve vtedy, keď existuje h také, že $f \circ h = id_Y$.
c) K zobrazeniu f existuje inverzné zobrazenie práve vtedy, keď f je bijekcia. (Tým sme znovu dokázali tvrdenie hovoriace, že zobrazenie je bijektívne práve vtedy, keď k nemu existuje inverzné zobrazenie.)
3.5. Nech $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$, $h\colon Y \to X$ sú zobrazenia. Ak g aj h sú inverzné zobrazenia k f, tak $g = h$.
3.6. Nech $f\colon X \to Y$ je surjekcia a $g, h\colon Y \to Z$ sú zobrazenia. Dokážte, že ak $g \circ f = h \circ f$, tak $g = h$.
3.7. Nech $f\colon Y \to Z$ je injekcia a $g, h\colon X \to Y$ sú zobrazenia. Dokážte, že ak $f \circ g = f \circ h$, tak $g = h$.
3.8. Dokážte: Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je surjekcia práve vtedy, keď pre každú množinu Z a všetky zobrazenia $g, h\colon Y \to Z$ platí: Ak $g \circ f = h \circ f$, tak $g = h$.
3.9. Dokážte: Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je injekcia práve vtedy, keď pre každú množinu Z a všetky zobrazenia $g, h\colon Z \to X$ platí: Ak $f \circ g = f \circ h$, tak $g = h$.
3.10. LAG 1, 1.1.19(7): Pre zobrazenia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definujme ich súčet ako zobrazenie

$$f + g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

a súčin ako zobrazenie

$$f \cdot g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Je súčet, resp. súčin ľubovoľných dvoch bijekcií zo $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{Z}$ znova bijekcia?

4 Inverzné zobrazenia

4.1. Nájdite príklad zobrazenia $f\colon X \to Y$, pre ktoré existuje ľavé inverzné zobrazenie, ale neexistuje pravé inverzné zobrazenie. T.j. existuje $g\colon Y \to X$ také, že $g \circ f = id_X$, ale neexistuje $h\colon Y \to X$ také, že $f \circ h = id_Y$.

4.2. Nájdite príklad zobrazenia $f\colon X \to Y$, pre ktoré existuje pravé inverzné zobrazenie, ale neexistuje ľavé inverzné zobrazenie. T.j. existuje $h\colon Y \to X$ také, že $f \circ h = id_Y$, ale neexistuje $g\colon Y \to X$ také, že $g \circ f = id_X$.

5 Vzor a obraz množiny*

K týmto úlohám sa na cvičení pravdepodobne *nestihneme* dostať, zatiaľ ich môžete ignorovať. (Ale ak vás zaujmú, môžete skúsiť niektoré z nich vyriešiť. Každopádne sa k veciam takéhoto typu neskôr dostanete na predmete 1-MAT-140 Diskrétna matematika (1) – čiže časom sa ich budete musieť naučiť.)

Pre $f\colon X \to Y$ a podmnožiny $A \subseteq X$ a $B \subseteq Y$ označujeme

$$f[A] = \{f(x); x \in A\}$$
$$f^{-1}[B] = \{x \in X; f(x) \in B\}$$

Inak povedané:

$$y \in f[A] \Leftrightarrow (\exists a \in A) y = f(a)$$
$$x \in f^{-1}[B] \Leftrightarrow f(x) \in B$$

5.1. Dokážte: Ak $A \subseteq B$, tak $f[A] \subseteq f[B]$.

5.2. Dokážte: $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$, $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$.

5.3. Ktoré z nasledujúcich tvrdení platia a ktoré neplatia? Zdôvodnite.
a) $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$
b) $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$
c) $f[A \cap B] \supset f[A] \cap f[B]$
d) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$
e) $f^{-1}[A \cap B] \subset f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$
f) $f^{-1}[A \cap B] \supset f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$
g) $f[f^{-1}[B]] = B$
h) $f[f^{-1}[B]] \subset B$
i) $f^{-1}[f[A]] = A$
j) $f^{-1}[f[A]] \subset A$
k) $g \circ f[A] = g[f[A]]$

5.4. Ak X je množina, tak $P(X)$ budeme označovať množinu všetkých jej podmnožín. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie a $g\colon P(X) \to P(Y)$ je zobrazenie definované tak, že $g(A) = f[A]$ pre ľubovoľnú podmnožinu $A \subseteq X$. Dokážte, že f je prosté práve vtedy, keď g je prosté.

5.5. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie. Dokážte, že f je injekcia práve vtedy, keď pre ľubovoľné dve podmnožiny $A, B \subseteq X$ platí $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$.

5.6. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie. Dokážte, že f je injekcia $\Leftrightarrow$ pre ľubovoľné dve podmnožiny $A, B \subseteq X$ platí $f[B \setminus A] = f[B] \setminus f[A]$.

1 Binárne operácie

1.1. Vypíšte všetky možné binárne operácie na množine $\{0,1\}$. Ktoré z nich sú asociatívne, komutatívne, majú neutrálny prvok? Pre ktoré existuje ku každému prvku aj inverzný?

1.2. Dokážte, že ak $\circ$ je binárna operácia na množine A a $\circ$ je asociatívna, tak ľubovoľné uzátvorkovanie výrazu $a \circ b \circ c \circ d$ predstavuje ten istý prvok.[1]

1.3. Pre dve reálne čísla a, b definujme

$$a * b = \frac{a+b}{2},$$

t.j. výsledkom je ich priemer. Je to binárna operácia na $\mathbb{R}$? Je táto operácia komutatívna? Je asociatívna? Má neutrálny prvok?

1.4. LAG 1.2.9(1): Na $\mathbb{R}$ definujme binárnu operáciu $*$ predpisom $x * y = x \cdot y^2$ (kde $\cdot$ je násobenie reálnych čísel). Má táto operácia neutrálny prvok? Ak má, nájdite ho. Je operácia $*$ asociatívna? Je komutatívna?

1.5*. Ak viete, že ide o tabuľku asociatívnej binárnej operácie, doplňte chýbajúce výsledky (ak sa to dá).

	a	b	c
a	b	a	c
b			
c			

2 Grupy

$(G,*)$ je grupa, ak $*$ je binárna operácia na G a ďalej platí: Binárna operácia $*$ je asociatívna (A). V G existuje neutrálny prvok pre túto operáciu (N). Pre každý prvok z G existuje inverzný prvok (I).

$$(\forall a,b,c \in G) a*(b*c) = (a*b)*c \tag{A}$$

$$(\exists e \in G)(\forall a \in G) a*e = e*a = e \tag{N}$$

$$(\forall a \in G)(\exists b \in G) a*b = b*a = e \tag{I}$$

O komutatívnej grupe (abelovskej grupe) hovoríme, ak operácia $*$ je navyše komutatívna.

$$(\forall a,b \in G) a*b = b*a \tag{K}$$

2.1. Ktoré z uvedených množín tvoria vzhľadom na dané operácie grupu? V ktorých prípadoch je táto grupa komutatívna?
a) $(\mathbb{Z},\cdot)$ (celé čísla s obvyklým násobením)
b) $(\mathbb{R},\cdot)$ (reálne čísla s obvyklým násobením)
c) $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, d) $(\mathbb{C},+)$, e) $(\mathbb{C},\cdot)$, f) $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$
g) $(\mathbb{R}^2,+)$ (so sčitovaním definovaným po zložkách)
h) $\mathbb{R}$ s operáciou $*$ definovanou ako $a*b = a+b-1$
i) $\mathbb{R}$ s operáciou $*$ zadanou predpisom $a*b = ab+a+b$
j) $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ s operáciou $*$ zadanou predpisom $a*b = ab+a+b$
k) Množina všetkých párnych celých čísel vzhľadom na sčitovanie.
l) Množina všetkých nepárnych celých čísel vzhľadom na sčitovanie.
m) $(\mathbb{Z}_5,\oplus)$

[1] Máme tu na mysli uzátvorkovania *bez výmeny poradia,* ktoré už jednoznačne určujú výsledok operácie. Aspoň bez dôkazu spomeniem, že to isté platí aj pre ľubovoľný počet prvkov. Počet uzátvorkovaní výrazu s n prvkami je n-té *Catalanove číslo.*

2.2. Tvoria všetky permutácie na konečnej množine M grupu? Je táto grupa komutatívna? Urobte tabuľku grupovej operácie v prípade $M = \{1, 2, 3\}$.

2.3. Je $(\mathbb{R}, *)$, kde $a * b = ab + a + b$, grupa? Ak nie, vedeli by ste vynechať niektorý prvok a z množiny $\mathbb{R}$ tak, aby $(\mathbb{R} \setminus \{a\}, *)$ bola grupa?

2.4. Nech $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Je G s operáciou $\cdot$ (násobenie komplexných čísel) grupa? Označme $C_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Je $(C_n, \cdot)$ grupa?

2.5. Dokážte, že ak $(G, \cdot)$ je grupa a $x, y, z \in G$ tak platí

$$xy = xz \Rightarrow y = z;$$
$$yx = zx \Rightarrow y = z.$$

(Tzv. *zákony o krátení* v grupe.)

2.6. Nech $(G, *)$ je grupa a e je jej neutrálny prvok. Dokážte:
a) $x * y = y * x \Leftrightarrow x * y * x^{-1} * y^{-1} = e$.
b) Ak $x * x = e$ pre všetky $x \in G$, tak G je komutatívna.

2.7. Ak $(G, \circ)$ je grupa a $a \in G$ je nejaký jej prvok, tak zobrazenie $f_a : G \to G$ definované ako $f_a(b) = a \circ b$ je bijekcia.

2.8. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Dokážte, že zobrazenie $f : G \to G$ definované ako $f(a) = a^{-1}$ je bijekcia.

2.9*. Nech G je neprázdna množina a $\circ$ je asociatívna binárna operácia na G. Potom G je grupa práve vtedy, keď pre ľubovoľné $a, b \in G$ majú rovnice

$$a \circ x = b$$
$$y \circ a = b$$

riešenie v G (inými slovami, pre ľubovoľné $a, b \in G$ existujú $x, y \in G$, ktoré spĺňajú tieto dve rovnosti.)

2.10*. Nech G je konečná množina a $\circ$ je binárna operácia na G taká, že platí asociatívny zákon a zákony o krátení. Dokážte, že G je grupa.

2.11*. Nech $*$ je binárna operácia na množine G, ktorá je
a) asociatívna,
b) existuje prvok $e \in G$ taký, že $(\forall x \in G) e * x = x$
c) pre každý prvok $x \in G$ existuje $y \in G$ také, že $x * y = e$ (kde e označuje prvok z časti b) t.j.

$$(\forall x \in G)(\exists y \in G) y * x = e.$$

Dokážte, že potom $(G, *)$ je grupa. (Všimnite si, že uvedené podmienky sa síce podobajú na definíciu neutrálneho a inverzného prvku, ale v oboch prípadoch tam máme iba jednu z dvoch rovností, ktoré vystupujú v definícii.)

2.12. Dokážte, že v konečnej grupe, ktorá má párny počet prvkov, existuje prvok rôzny od neutrálneho prvku taký, že $a \circ a = e$.

2.13. Nech konečná množina $G = \{e, a_1, \ldots, a_n\}$ tvorí s operáciou $*$ komutatívnu grupu a e je jej neutrálny prvok. Dokážte, že $(a_1 * a_2 * \cdots * a_n)^2 = e$.

2.14. Nech $*$ je binárna operácia na množine A, taká, že pre každé $a, b, c \in A$ platí $a*(b*c) = (a*c)*b$ a $*$ má neutrálny prvok. Dokážte, že operácia $*$ je komutatívna a asociatívna.

2.15. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Dokážte, že ak $x \circ x = x$, tak $x = e$.

2.16. Zistite, či $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \square)$, kde pre každé $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ definujeme $(a, b) \square (c, d) = (2ac, b + d)$, je grupa.

2.17. Nech $G = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Definujme na tejto množine binárnu operáciu $*$ predpisom $(a, b) * (c, d) = (a + bc, bd)$. Je to skutočne binárna operácia? Je $(G, *)$ grupa? Je to komutatívna grupa?

2.18. Nech $G = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \setminus \{(0,0)\}))$. Definujme na tejto množine binárnu operáciu $*$ predpisom $(a,b)*(c,d) = (ac+2bd, ad+bc)$. Je to skutočne binárna operácia? Je $(G,*)$ grupa? Je to komutatívna grupa?

2.19. Nech $(G, *_G)$ a $(H, *_H)$ sú grupy. Dokážte, že aj $G \times H$ s operáciou $*$ definovanou ako

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 *_G g_2, h_1 *_H h_2)$$

je grupa.

2.20. Doplňte nasledujúcu tabuľku

	a	b	c	d
a				
b				d
c			d	
d				

tak aby ste dostali grupu.

2.21. Ak pre každý prvok x grupy $(G, \circ)$ platí $x \circ x = e$, tak táto grupa je komutatívna.

2.22. Nech G je grupa, e je jej neutrálny prvok a $a, b \in G$. Ukážte, že ak $(ab)^2 = e$, tak aj $(ba)^2 = e$.

2.23. Nech G je konečná *komutatívna* grupa, $|G| = n$. Neutrálny prvok tejto grupy označme e a jej prvky označme ako $a_1, \dots, a_n$ (t.j. $G = \{a_1, \dots, a_n\}$).
a) Ukážte, že pre ľubovoľné $a \in G$ platí $G = \{aa_1, \dots, aa_n\}$.
b) Ukážte, že pre ľubovoľné $a \in G$ platí $a^n = e$.
(Poznámka: Takéto tvrdenie platí aj pre nekomutatívnej grupy – v tom prípade ale treba použiť iný argument. Dá sa to odvodiť napríklad ako dôsledok Lagrangeovej vety, ktorú stručne spomenieme aj na tomto predmete.)

2.24. Nech G je konečná n-prvková množina, jej prvky označme ako $a_1, \dots, a_n$ (t.j. $G = \{a_1, \dots, a_n\}$). Nech ďalej $*$ je binárna operácia na G, ktorá má neutrálny prvok e, je asociatívna, komutatívna a platia pre ňu zákony o krátení.
a) Ukážte, že pre ľubovoľné $a \in G$ platí $G = \{aa_1, \dots, aa_n\}$.
b) Ukážte, že pre ľubovoľné $a \in G$ platí $a^n = e$.
(Poznámka: Takéto tvrdenie platí aj pre nekomutatívnej grupy – v tom prípade ale treba použiť iný argument. Dá sa to odvodiť napríklad ako dôsledok Lagrangeovej vety, ktorú stručne spomenieme aj na tomto predmete.)

Tabuľka grupy S_3:

	id	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$
id	id	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	id	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	id	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	id	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	id
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	id	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$

1 Podgrupy

H je podgrupa grupy $(G,*)$ ak H je neprázdna podmnožina G a platí:

- pre ľubovoľné $x, y \in H$ platí $x * y \in H$ a $x^{-1} \in H$;
- pre ľubovoľné $x, y \in H$ platí $x * y^{-1} \in H$.

Každá podgrupa obsahuje neutrálny prvok.

1.1. Nájdite všetky podgrupy grupy S_3. (LAG1 1.4.6.(8))

1.2. Nech $(G,*)$ je grupa a $H \neq \emptyset$ je konečná podmnožina taká, že pre ľubovoľné $x, y \in H$ platí $x * y \in H$. Potom H je podgrupa grupy G. (LAG1 1.4.6(4))

1.3. Ukážte, že $H = \{\frac{m}{n}; m, n \text{ sú nepárne}\}$ je podgrupa grupy $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot)$.

1.4. Je množina $A = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ podgrupa grupy $(\mathbb{R}, +)$?

1.5. Nájdite všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ a všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_4$ (v oboch prípadoch operácia $\oplus$). Majú tieto grupy rovnaký počet dvojprvkových podgrúp? (Viete na základe výsledku zdôvodniť, že tieto dve grupy nie sú izomorfné?)

1.6. Je množina $H = \{\ln a; a \in \mathbb{Q}, a > 0\}$ podgrupou grupy $(\mathbb{R}, +)$?

1.7. Nech H je podgrupa grupy G. Nech $g \in G$. Ukážte, že $gHg^{-1} = \{ghg^{-1}; h \in H\}$ je podgrupa grupy G.

1.8. Nech $M \neq \emptyset$ a G je množina všetkých bijektívnych zobrazení z M do M. Je $\circ$ binárna operácia na G? Je $(G, \circ)$ grupa? Je komutatívna?

1.9. Uvažujme funkcie $f_i \colon \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ definované ako $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1/x$, $f_3(x) = 1 - x$, $f_4(x) = 1/(1-x)$, $f_5(x) = (x-1)/x$, $f_6(x) = x/(x-1)$. Dokážte, že $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ s operáciou skladania zobrazení tvorí grupu. Zostavte tabuľku grupovej operácie a zistite, či je táto grupa izomorfná s grupou S_3.

1.10. Nájdite príklad nekonečnej grupy, ktorá obsahuje netriviálnu konečnú podgrupu. (Pod netriviálnou podgrupou tu rozumieme podgrupu, ktorá má viac ako jeden prvok.)

1.11*. Nech G je grupa a H_1, H_2 sú jej podgrupy. Dokážte, že $H_1 \cup H_2$ je podgrupa práve vtedy, keď $H_1 \subseteq H_2$ alebo $H_2 \subseteq H_1$.

1.12*. Ak A, B, C sú podgrupy grupy G a $C \subseteq A \cup B$, tak $C \subseteq A$ alebo $C \subseteq B$.

1.13. Nech $(G_1, *_1)$, $(G_2, *_2)$ sú grupy. Zoberme grupu $(G_1 \times G_2, *)$, kde

$$(a, b) * (a', b') = (a *_1 a', b *_2 b'),$$

t.j. G je priamy súčiny grúp $G_1 \times G_2$.
a) Ukážte, že ak H_1 je podgrupa G_1 a H_2 je podgrupa G_2, tak $H_1 \times H_2$ je podgrupa grupy $G_1 \times G_2$.
b) Nájdite príklad grúp G_1, G_2 takých, že $G_1 \times G_2$ má podgrupu, ktorá sa nedá dostať ako $H_1 \times H_2$ pre žiadne $H_1 \subseteq G_1$, $H_2 \subseteq G_2$.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1						
f_2						
f_3						
f_4						
f_5						
f_6						

2 Homomorfizmy grúp

$f\colon (G,*) \to (H,\Box)$

$$f(x*y) = f(x)\Box f(y)$$

2.1. Dokážte: Nech $(G,*)$ a $(H,\circ)$ sú grupy a G je komutatívna. Ak existuje izomorfizmus $f\colon G \to H$, tak aj $(H,\circ)$ je komutatívna grupa. (Teda grupa izomorfná s komutatívnou grupou je komutatívna.) Platí toto tvrdenie, ak predpoklad o existencii izomorfizmu nahradíme požiadavkou na existenciu homomorfizmu? Čo sa stane, ak budeme požadovať existenciu surjektívneho homomorfizmu (=epimorfizmu)?

2.2. Zistite, či sú grupy $(\mathbb{Z}_4,+)$ a $(\mathbb{Z}_5\setminus\{0\},\cdot)$ izomorfné.

2.3. Sú grupy $(S_3,\circ)$ a $(\mathbb{Z}_6,+)$ izomorfné?

2.4. Sú grupy $(\mathbb{Z}_6,+)$ a $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3,+)$ izomorfné? (Operáciu $+$ na množine $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ chápeme po zložkách, t.j. $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1\oplus_2 x_2, y_1\oplus_3 y_2)$. Operácie $\oplus_2$ a $\oplus_3$ označujú sčitovanie modulo 2 resp. modulo 3 – na tomto mieste som použil iné označenie, aby som zdôraznil, že na prvej a na druhej súradnici máme inú operáciu.)

2.5. Sú grupy $(\mathbb{Z}_4,+)$ a $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+)$ izomorfné?

2.6. Nájdite všetky homomorfizmy $(S_3,\circ)\to(\mathbb{Z}_2,+)$.

2.7. Nech $(G,*)$ je ľubovoľná grupa. Dokážte, že zobrazenie $g\mapsto g*g$ je homomorfizmus z G do G práve vtedy, keď G je komutatívna.

2.8. Nech $(G,*)$ je grupa. Dokážte, že zobrazenie $g\mapsto g^{-1}$ je homomorfizmus z G do G práve vtedy, keď G je komutatívna.

2.9. Dá sa výsledok z predchádzajúceho cvičenia použiť na iný dôkaz toho, že $(a_1*a_2*\cdots*a_n)^2 = e$ platí pre konečnú komutatívnu grupu $G=\{e,a_1,\dots,a_n\}$?

2.10. Nech $f,g\colon G\to H$ sú homomorfizmy grúp. Je množina $\{a\in G; f(a)=g(a)\}$ podgrupa grupy G?

2.11. Nech $(G,*)$ je grupa. Ukážte, že $(G,*')$ s operáciou definovanou ako[1]

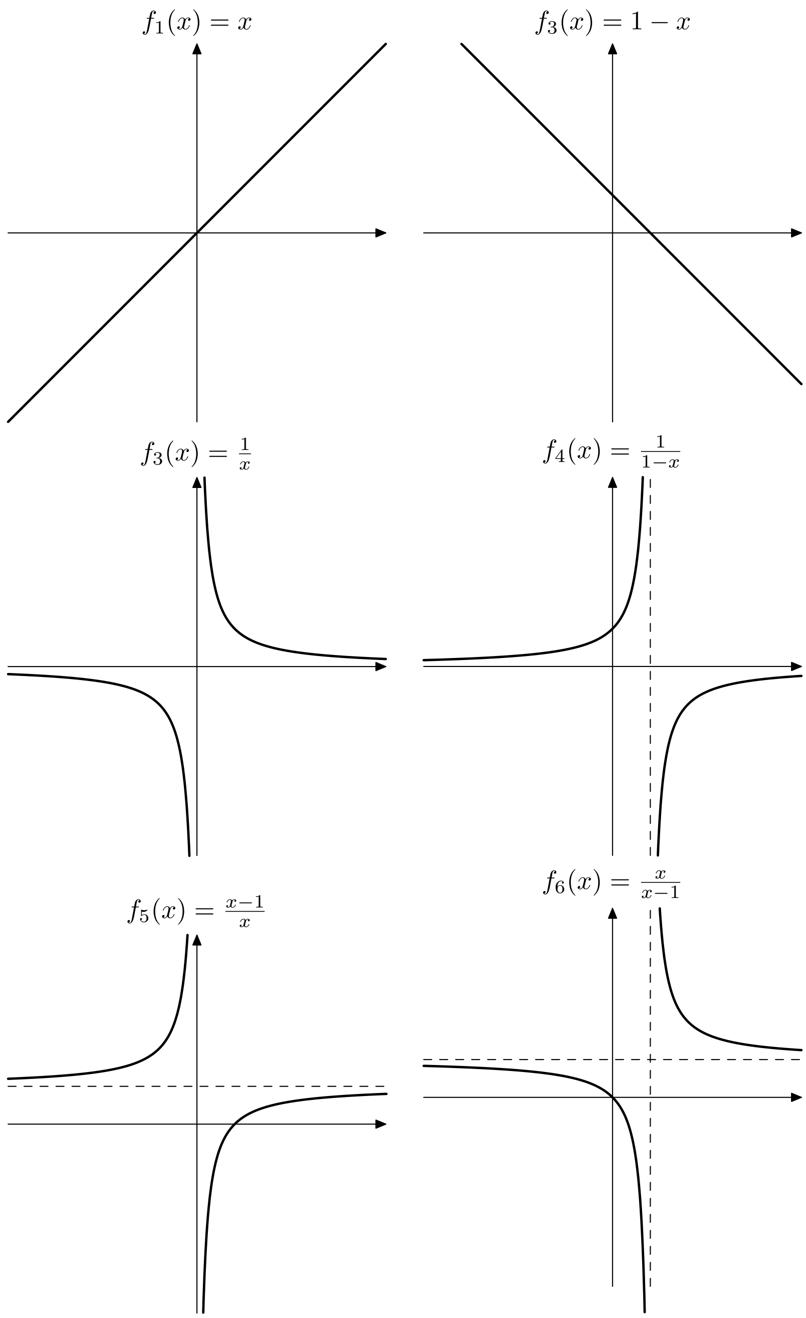
$$x*'y = y*x$$

je tiež grupa a že tieto dve grupy sú izomorfné, t.j. $(G,*)\cong(G,*')$.

2.12. V tejto úlohe môžete používať fakt, že počet prvkov podgrupy je deliteľ počtu prvkov grupy (Lagrangeova veta) – aj keď tento výsledok dokážeme až neskôr.
a) Nájdite všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$. Je táto grupa izomorfná s grupou $\mathbb{Z}_8$?
b) Nájdite všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$. Je táto grupa izomorfná s grupou $\mathbb{Z}_9$?

2.13. Ukážte, že grupa $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5$ je izomorfná s grupou $\mathbb{Z}_{10}$.

[1] Wikipédia: Opposite group `https://en.wikipedia.org/wiki/Opposite_group`



Obr. 1: Grupa zo šiestich funkcií $f_1, \dots, f_6$

1 Relácie ekvivalencie

Relácia na množine M je ľubovoľná podmnožina $R \subseteq M \times M$. Relácia ekvivalencie je taká relácia, ktorá je

- reflexívna: $(\forall x \in M)\ (x,x) \in R$;
- symetrická: $(\forall x,y \in M)\ (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$;
- tranzitívna: $(\forall x,y,z \in M)\ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

Namiesto $(x,y) \in R$ často používame aj označenie xRy. (Napríklad ak reláciu označím ako $\sim$, tak označenie $x \sim y$ určite vyzerá prirodzenejšie než $(x,y) \in \sim$.)

Triedy ekvivalencie:

$$[x] = \{y \in M; x \sim y\}$$

1.1. Overte, či relácia R je relácia ekvivalencie na množine M.
a) M je ľubovoľná množina, $R = M \times M$;
b) M je ľubovoľná množina, $R = \{(x,x); x \in M\}$
c) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x,y) \in M \times M; x - y \in \mathbb{Z}\}$;
d) $M = \mathbb{Z}^2$, $R = \{((a,b),(c,d)) \in M \times M; a + d = b + c\}$;
e) $M = \mathbb{N}^2$, $R = \{((a,b),(c,d)) \in M \times M; a + d = b + c\}$;
f) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(a,b) \in M \times M; |a - b| \leq 1\}$;
g) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x,y) \in M \times M; x^2 = y^2\}$;
h) $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, t.j. M je množina všetkých podmnožín množiny $\mathbb{N}$ a $R = \{(A,B) \in M \times M; A \triangle B \text{ je konečná}\}$ (t.j. množiny A a B sú v relácii R, ak ich symetrický rozdiel $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ je konečná množina);
i) $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $R = \{(A,B) \in M \times M; \text{ existuje bijekcia z } A \text{ do } B\}$;
j) $M = \mathbb{Z}$; $R = \{(x,y) \in M \times M; 3 \mid x + 2y\}$;
k) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x,y) \in M \times M; x - y \in \mathbb{Q}\}$;
l) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1,x_2),(y_1,y_2) \in M \times M; x_1 = y_1)\}$;
m) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1,x_2),(y_1,y_2) \in M \times M; x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2)\}$;
n) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1,x_2),(y_1,y_2) \in M \times M; x_1 = y_2 \wedge x_2 = y_1)\}$;
o) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1,x_2),(y_1,y_2) \in M \times M; x_1 = y_1 \vee x_2 = y_2)\}$;
p) $M = \{f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$, t.j. M je množina všetkých zobrazení zo $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$; $R = \{(f,g) \in M \times M; f(1) = g(1)\}$;
q) $M = \{f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$, t.j. M je množina všetkých zobrazení zo $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$; $R = \{(f,g) \in M \times M; f(1) = g(0)\}$;
r) $M = G$, kde $(G,\circ)$ je grupa, H je podgrupa grupy G a $R = \{(x,y) \in M \times M; xy^{-1} \in H\}$. Sú niektoré relácii uvedených v ostatných častiach špeciálne prípady tejto relácie?
s) M je ľubovoľná množina, $f\colon M \to S$ je ľubovoľné zobrazenie a $R = \{(x,y) \in M \times M; f(x) = f(y)\}$. (=LAG1, 1.6.12(1)) Sú niektoré relácii uvedených v ostatných častiach špeciálne prípady tejto relácie?

1.2. Koľko existuje relácií ekvivalencie na trojprvkovej množine $\{0,1,2\}$?

1.3. Dokážte: Ak R_1 a R_2 sú relácie ekvivalencie na tej istej množine M, tak aj $R = R_1 \cap R_2$ je relácia ekvivalencie na M. (Všimnite si, že $(a,b) \in R \Leftrightarrow (a,b) \in R_1 \wedge (a,b) \in R_2$.) Platí podobné tvrdenie aj pre zjednotenie relácií ekvivalencie?

2 Faktorové grupy

Ak máme komutatívnu grupu $(G,+)$ a nejakú jej podgrupu H, tak predpis[1]

$$x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad x - y \in H$$

[1] Ak by sme označovali operáciu ako $\cdot$, tak by sme tú istú podmienku zapísali ako $xy^{-1} \in H$.

určuje reláciu ekvivalencie na množine G.

Množinu všetkých tried tejto ekvivalencie označíme ako G/H, t.j.

$$G/H = \{[a]; a \in G\}.$$

Predpis

$$[a] + [b] = [a + b]$$

potom určuje dobre definovanú binárnu operáciu na množine G/H. Dá sa dokázať, že G/H s touto operáciou tvorí grupu. Túto grupu voláme faktorová grupa grupy $(G, +)$ podľa podgrupy H.

Veta o faktorovom izomorfizme. Nech G, G' sú grupy, navyše G je komutatívna.[2] Ak $f: G \to G'$ je surjektívny homomorfizmus, tak $\operatorname{Ker} f$ je podgrupa grupy G a platí

$$G/\operatorname{Ker} f \cong G',$$

t.j. faktorová grupa G podľa $\operatorname{Ker} f$ je izomorfná s G'.

2.1. Ukážte, že faktorová grupa G/H je izomorfná s grupou K. (Aspoň jednu úlohu skúste vyriešiť priamo pomocou definície faktorovej grupy a aspoň jednu úlohu pomocou vety o faktorovom izomorfizme.)
   a) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, y); x + 2y = 0\}$, $K = (\mathbb{R}, +)$;
   b) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, 3x); x \in \mathbb{R}\}$, $K = (\mathbb{R}, +)$;
   c) $G = (\mathbb{C}, +)$, $H = \mathbb{R}$, $K = (\mathbb{R}, +)$;
   d) $G = (\mathbb{Z}_8, +)$, $H = 2\mathbb{Z}_4 = \{0, 2, 4, 6\}$, $K = (\mathbb{Z}_2, +)$;
   e) $G = (\mathbb{Z}_8, +)$, $H = 4\mathbb{Z}_2 = \{0, 4\}$, $K = (\mathbb{Z}_4, +)$;
   f) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $K = \{c \in \mathbb{C}; |c| = 1\}$;
   g) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$, $K = \{c \in \mathbb{C}; |c| = 1\}$;
   h) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = 4\mathbb{Z} = \{4z; z \in \mathbb{Z}\}$, $K = \mathbb{Z}_4$;
   i) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \mathbb{R}^+$, $K = (\mathbb{Z}_2, +)$;
   j) $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $H = \{\pm 1\}$, $K = (\mathbb{R}^+, \cdot)$

2.2. Zistite, či dané grupy sú izomorfné. V celom cvičení budeme ako S označovať grupu $(\{c \in \mathbb{C}; |c| = 1\}, \cdot)$ (prípadne množinu prvkov tejto grupy) a $C_n = (\{c \in \mathbb{C}; c^n = 1\}, \cdot)$
   a) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)/\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)/\mathbb{R}^+$ (pod $\mathbb{R}^+$ tu myslíme kladné reálne čísla, čiže $0 \notin \mathbb{R}^+$), S
   b) $(\mathbb{R}, +)/\mathbb{Z}$, S/C_n, S
   c) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)/C_n$
   d) $(\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot)/\mathbb{R}^+$, C_n
   e) $(\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot)/C_n$, $\mathbb{R}^+$
   f) C_{12}/C_4, $\mathbb{Z}_3$
   g) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)/(\mathbb{Z}_2 \times \{0\})$, $\mathbb{Z}_3$

2.3. Nech G je komutatívna grupa a H je jej podgrupa. Ukážte, že zobrazenie $f(x) = x + h$ je bijekcia medzi H a $[x]_H$. (T.j. pre každú triedu rozkladu G podľa H máme bijekciu medzi H a $[x]_H$.)[3]

[2] Tento predpoklad je tu iba preto, aby vôbec malo zmysel hovoriť o faktorovej podgrupe. Ak sa neskôr budete učiť o normálnych podgrupách, tak zistíte, že faktorové grupy sa dajú robiť aj pre nekomutatívne grupy. Vtedy to však nebude fungovať s ľubovoľnou podgrupou. Matematici by sa s tým mali stretnúť na predmete Algebra (1) v druhom ročníku. Poistní matematici na predmete Úvod do vysokoškolskej matematiky (2).

[3] V skutočnosti keď si človek pozrie dôkazy tých vecí, ktoré bolo potrebné potiaľto, tak tie sa dali urobiť aj bez použitia komutatívnosti. Takže takéto tvrdenie platí aj pre nekomutatívne grupy.

2.4. S využitím predošlej úlohy dokážte, že ak G je konečná komutatívna grupa a H je jej podgrupa, tak počet prvkov H delí počet prvkov G. (T.j. $|G|$ je násobkom $|H|$.)[4]

2.5. Nech G je komutatívna grupa, $f\colon G \to G'$ je homomorfizmus grúp a $H = \operatorname{Ker} f$. Ako $[a]$ označíme triedu prvku a vo faktorovej grupe G/H.
Dokážte, že pre ľubovoľné $a \in G$ platí

$$[a] = \{x \in G; f(x) = f(a)\}.$$

(Týmto vlastne dokážeme, že triedy rozkladu podľa $\operatorname{Ker} f$ sú presne vzory jednoprvkových podmnožín $\operatorname{Im} f$.)[5]

[4]Táto vlastnosť platí aj pre grupy, ktoré nie sú komutatívne. Neskôr sa s ňou ešte stretnete pod názvom *Lagrangeova veta*.

[5]`https://msleziak.com/forum/viewtopic.php?t=1917`

1 Polia

1.1. Ktoré z uvedených množín tvoria spolu s obvyklým sčitovaním a násobením pole?
a) $F = \{a + ib; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, b \geq 0\}$
b) $F = \{a + ib; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
c) $F = \{a + ib; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$
d) $F = \{a + b\sqrt{5}; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$ (Hint: Môže byť užitočné najprv overiť, že pre $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ platí $a + b\sqrt{5} = c + d\sqrt{5}$ p.v.k. $a = c$ a $b = d$.)
e) $F = \{a + \sqrt{3}ib; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
f) $F = \{a + \frac{b}{\sqrt{2}}; a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
g*) $F = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}; a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$ (Hint: Možno pomôže prepísať si túto množinu do tvaru $F = \{a + b\sqrt{3}; a, b \in F'\}$, kde $F' = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$.)
h*) $F = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}; a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
i*) $F = \{a + b\sqrt[3]{5}; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
j**) $F = \{a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2; a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ (Môže byť pre vás užitočný vzorec $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u + v + w)(u^2 + v^2 + w^2 - uv - uw - vw) = \frac{1}{2}(u + v + w)((u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2)$.) [1]

1.2. V poli $\mathbb{Z}_5$ vyrátajte $2^{-1} + 4$, $(-2) + 4$, $2^{-1} + 3$ a $-4 \odot 3^{-1}$.

1.3. Napíšte tabuľku násobenia pre $\mathbb{Z}_4$ a $\mathbb{Z}_6$. Viete nejako zdôvodniť, že $\mathbb{Z}_4$ resp. $\mathbb{Z}_6$ nie sú polia?

1.4. V ľubovoľnom poli F platí:

$$
\begin{gathered}
a + b = a + c \Rightarrow b = c \\
(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd \\
-(-a) = a \\
-0 = 0 \\
-(a + b) = (-a) + (-b) \\
(a - b)c = ac - bc \\
1 \neq 0 \\
a \cdot a = 1 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = -1 \\
a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \vee a = -b \\
a \cdot (b_1 + \ldots + b_n) = a \cdot b_1 + \ldots + a \cdot b_n
\end{gathered}
$$

1.5. Na množine $\mathbb{R}^+$ všetkých kladných reálnych čísel zadefinujme operácie $\oplus$ a $\odot$ tak, že $x \oplus y = x \cdot y$ a $x \odot y = x^y$. Ktoré z axióm poľa spĺňa $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$?

1.6. Nech na množine $M = \{0, 1\}$ sú operácie $+$ a $\cdot$ dané tabuľkami

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	1	1

Ukážte, že $(M, +)$ a $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ sú komutatívne grupy a že platí distributívny zákon $(a + b)c = ac + bc$. Je $(M, +, \cdot)$ pole?

1.7. Zistite, či $(\mathbb{R}, +, *)$, kde $+$ je obvyklé sčitovanie reálnych čísel a pre každé $a, b \in \mathbb{R}$ $a * b = -2ab$, je pole.

1.8. Na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definujeme operácie $+$ a $\cdot$ takto:
a) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b).(c, d) = (ac, bd)$,
b) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
c) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc - bd)$

[1] Táto úloha je naozaj dosť náročná. Snáď je aspoň trochu zaujímavé vedieť, že sa dá vyriešiť pomerne jednoducho, keď už budete mať nejaké vedomosti o báze a dimenzii vektorových priestorov. Podobnými poľami sa budete zaoberať neskôr v druhom ročníku na algebre. Tiež prezradím, že rovnosť $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u+v+w)(u^2+v^2+w^2-uv-uw-vw)$ sa okrem manuálneho roznásobenia dá overiť aj použitím vhodného determinantu. O determinantoch sa budeme učiť na lineárnej algebre 1.

d) $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ a $(a,b)\cdot(c,d)=(bd-ac,ad+bc)$
Je potom $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},+,\cdot)$ pole?

1.9. Pre ktoré prvky a poľa $\mathbb{Z}_7$ má riešenie rovnica $x^2=a$? Koľko je takých prvkov v poli $\mathbb{Z}_{109}$?

1.10*. Nech F je konečné pole a platí $|F|=n$. Ukážte, že potom pre každý prvok $a\in F\setminus\{0\}$ platí $a^{n-1}=1$. (V staršej sade úloh máme súvisiace tvrdenie pre konečné grupy. Týmto sme dostali aj jedno možné odvodenie malej Fermatovej vety.[2])

2 Euklidov algoritmus

Na cvičeniach si zvykneme ukázať aj rozšírený Euklidov algoritmus, t.j. ako sa dajú vypočítať nájsť pre dané, $a,b\in\mathbb{Z}$ čísla $u,v\in\mathbb{Z}$ také, že platí

$$d=au+bv,$$

kde $d=\gcd(a,b)$ je najväčší spoločný deliteľ čísel a, b. Existenciu takýchto čísel ste využili v dôkaze, že $\mathbb{Z}_p$ je pole pre každé prvočíslo p. Tento algoritmus by sa pri väčšom p dal využiť aj na výpočet inverzného prvku v poli $\mathbb{Z}_p$. Stretnete sa s ním aj neskôr – okrem iného sa analogicky dá postupnosť aj pri výpočte najväčšieho spoločného deliteľa dvoch polynómov.[3]

1. Overte, čí p je prvočíslo. Ak je to prvočíslo, nájdite x^{-1} v poli $\mathbb{Z}_p$.
   a) $p=103$, $x=41$
   b) $p=107$, $x=32$
   c) $p=109$, $x=61$
   d) $p=71$, $x=31$
   e) $p=97$, $x=18$
2. Pre dané čísla $a,b\in\mathbb{Z}$ vypočítajte $d=\gcd(a,b)$ a nájdite čísla $u,v\in\mathbb{Z}$, pre ktoré platí $au+bv=d$.
   a) $a=24$, $b=17$
   b) $a=172$, $b=20$
   c) $a=60$, $b=17$
   d) $a=100$, $b=23$
   e) $a=29$, $b=19$
   f) $a=80$, $b=62$

[2] Malá Fermatova veta hovorí, že pre ľubovoľné prvočíslo p a ľubovoľné $a\in\mathbb{Z}$ platí $a^p\equiv a \pmod{p}$. Resp. dá sa vyjadriť aj tak, že ak $p\nmid a$, tak $a^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}$; čo je vlastne toto tvrdenie aplikované na $\mathbb{Z}_p$.

[3] Nejaké ukážky výpočtu môžete nájsť na fóre: `https://msleziak.com/forum/viewtopic.php?t=298`.

1 Vektorové priestory

$(V, +, \cdot)$ je vektorový priestor nad R ak $+\colon V \times V \to V$, $\cdot\colon R \times V \to V$ a platí

- $(V, +)$ je komutatívna grupa;
- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$ pre ľubovoľné $\alpha, \beta \in R$, $\vec{x} \in V$;
- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ pre ľubovoľné $\alpha \in R$, $\vec{x}, \vec{y} \in V$;
- $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$ pre ľubovoľné $\alpha, \beta \in R$, $\vec{x} \in V$;
- $1\vec{x} = \vec{x}$ pre ľubovoľné $\vec{x} \in V$.

1.1. Ukážte, že $\mathbb{R}$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{Q}$.

1.2. Koľko prvkov má vektorový priestor $(\mathbb{Z}_3)^n$? Čomu sa v tomto priestore rovná $\vec{\alpha}+\vec{\alpha}+\vec{\alpha}$?

1.3. Zistite, či $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ s operáciami $+$ a $\cdot$ definovanými tak, že $(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d)$ pre ľubovoľné $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $r \cdot (a, b) = (ra, 2rb)$ pre ľubovoľné $r \in \mathbb{R}$, je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.

1.4. Zistite, či $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, ak definujeme $x \oplus y = xy$, $c \odot x = x^c$ pre $x, y \in \mathbb{R}^+$, $c \in \mathbb{R}$.

2 Podpriestory

Ak V je vektorový priestor nad poľom R a M je *neprázdna* podmnožina V, tak tieto podmienky sú ekvivalentné:

- M je podpriestor priestoru V.
- Pre ľubovoľné $\vec{x}, \vec{y} \in M$ a $\alpha \in R$ platí $\vec{x} + \vec{y} \in M$, $\alpha\vec{x} \in M$.
- Pre ľubovoľné $\vec{x}, \vec{y} \in M$ a $\alpha, \beta \in R$ platí $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in M$.

Ak M je podpriestor, tak $\vec{0} \in M$. (Každý podpriestor obsahuje nulový vektor.)

2.1. Ktoré z týchto množín tvoria vektorový podpriestor priestoru $\mathbb{R}^3$?
a) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 \in \mathbb{Z}\}$
b) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0\}$
c) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}$
d) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 3x_1 + 4x_2 = 1\}$
e) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 7x_1 - x_2 = 0\}$
f) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 = x_3\}$
g) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; |x_1| = |x_2|\}$
h) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$
i) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 2x_1 = -x_2 = x_3\}$
j) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

2.2. Ktoré z týchto podmnožín tvoria vektorový podpriestor priestoru reálnych funkcií $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
a) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $2f(0) = f(1)$
b) nezáporné funkcie
c) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $f(1) = 1 + f(0)$
d) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $(\forall x \in \langle 0, 1\rangle) f(x) = f(1 - x)$
e) ohraničené funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
f) spojité funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
h) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že existuje konečná limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
i*) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že existuje konečná alebo nekonečná limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

2.3. Nech S, T sú podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F. Ukážte, že $S \cup T$ je podpriestor priestoru V práve vtedy, keď $S \subseteq T$ alebo $T \subseteq S$.

2.4. Nech S_1, S_2, S_3 sú podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F. Ukážte, že ak $S_1 \subseteq S_2 \cup S_3$, tak musí platiť $S_1 \subseteq S_2$ alebo $S_1 \subseteq S_3$.

2.5. Nech V je vektorový priestor nad poľom F a $S \neq \emptyset$ je podmnožina V. Ukážte, že S je podpriestor V práve vtedy, keď pre ľubovoľné $c \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S$ platí $c\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in S$.

Systémy lineárnych rovníc

1. Nájdite všetky riešenia daných sústav rovníc nad poľom $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & -3x_4 & = 1 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = -3 \\ x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & = 1 \\ & -7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} x_1 + x_2 & = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 & = 2 \\ x_4 + x_5 & = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} 2x & -5y & +3z & +t & = 5 \\ 3x & -7y & +3z & -t & = -1 \\ 5x & -9y & +6z & +2t & = 7 \\ 4x & -6y & +3z & +t & = 8 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrl} x & +2y & +4z & -3t & = 0 \\ 3x & +5y & +6z & -4t & = 0 \\ 4x & +5y & -2z & +3t & = 0 \\ 3x & +8y & +24z & -19t & = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} x & +4y & -2z & +8t & = 12 \\ & y & -7z & +2t & = -4 \\ & & 5z & -t & = 7 \\ & & z & +3t & = -5 \end{array}$$

2. Riešte v $\mathbb{Z}_5$ sústavu určenú maticou:
$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&3&1 \\ 1&2&4&0&2 \\ 2&1&3&4&3 \\ 3&0&4&4&4 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 3&1&2&2&1 \\ 4&4&2&1&0 \\ 0&1&2&4&1 \\ 2&1&1&2&3 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 2&4&1&1&2 \\ 3&3&3&2&1 \\ 1&4&2&1&1 \\ 4&2&0&3&2 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&2&4 \\ 2&3&1&1&3 \\ 4&3&1&3&2 \\ 3&4&3&2&1 \end{array}\right)$
3. Riešte v $\mathbb{R}$ sústavu určenú maticou:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 3&-2&1&11 \\ 1&1&-3&7 \\ 11&-4&-3&10 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&2 \\ 3&-1&2&7 \\ 1&0&-1&-2 \\ 2&1&1&7 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-3&1 \\ -1&3&-2&3 \\ 0&5&-5&4 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&1&0 \\ 4&1&-1&2 \\ 1&2&4&0 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&4&-3&0 \\ 1&-3&-1&0 \\ 2&1&-4&0 \end{array}\right)$
Riešenie: a) nemá riešenie, b) (1,2,3) c) $(t - \frac{3}{5}, t + \frac{4}{5}, t)$, d) $(\frac{20}{47}, \frac{6}{47}, -\frac{8}{47})$, e) $(\frac{13}{7}t, \frac{2}{7}t, t)$
4. Riešte v $\mathbb{Z}_7$ sústavu určenú maticou:
$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&5 \\ 0&1&1&1&6 \\ 3&1&2&3&0 \\ 0&3&6&1&4 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&1&0 \\ 2&1&0&3&1 \\ 3&1&1&1&5 \\ 0&1&2&3&6 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 2&1&4&1&4 \\ 1&3&3&1&5 \\ 4&1&5&1&6 \\ 2&3&1&4&2 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&1&3&1 \\ 2&1&2&3&2 \\ 3&1&1&1&1 \\ 0&6&5&3&3 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&1&3&1 \\ 2&3&1&4&2 \\ 1&1&0&1&1 \\ 0&4&4&1&0 \end{array}\right)$
5. Nájdite reálne čísla a, b, c tak, aby graf funkcie $f(x) = ax^2 + bx + c$ prechádzal bodmi $(1, 2)$, $(-1, 6)$ a $(2, 3)$.
6. Nájdite hodnotu parametra $b \in \mathbb{R}$, pre ktorú má daná sústava riešenie. Pre túto hodnotu aj vyjadrite množinu riešení.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 4x_4 &= 3 \\ -x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= b \\ 3x_1 + 10x_2 - 5x_3 + 6x_4 &= 4 \end{aligned}$$

7. V závislosti od parametra $a \in \mathbb{R}$ riešte systém daný maticou:
a) $\left(\begin{array}{cc|c} a&1&a^2 \\ 1&a&1 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{cc|c} a&1&a^3 \\ 1&a&1 \end{array}\right)$
8. Ako vyzerajú, v závislosti od parametra p, riešenia sústavy danej maticou:
$\left(\begin{array}{cccc|c} p&1&1&1&1 \\ 1&p&1&1&1 \\ 1&1&p&1&1 \\ 1&1&1&p&1 \end{array}\right)$

9*. O sústave n rovníc o n neznámych nad poľom $\mathbb{R}$ vieme, že jej koeficienty tvoria aritmetickú postupnosť (ako napríklad pre maticu $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&3&4 \\ 5&6&7&8 \\ 9&10&11&12 \end{array}\right)$) a že táto sústava má jediné riešenie. Nájdite riešenie sústavy.