Termín na odovzdanie: cvičenia počas druhého týždňa semestra (27. septembra).

---

a) Dokážte, alebo nájdite kontrapríklad: Ak $f\colon X \to X$ je zobrazenie a platí $f \circ f = id_X$, tak f je injektívne.
b) Dokážte, alebo nájdite kontrapríklad: Ak $f\colon X \to X$ je injektívne zobrazenie, tak platí $f \circ f = id_X$.
(Pri riešení sa môžete odvolať na tvrdenia, ktoré boli dokázané na prednáške alebo na cviku – bez toho, že by bolo treba písať znovu ich dôkaz. Ak sa však nejaké tvrdenie budete chcieť použiť, jasne sformulujte, čo presne používate.)

Termín na odovzdanie: cvičenia počas tretieho týždňa semestra (4. októbra).

Ukážte, že $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ s binárnou operáciou definovanou ako

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$$

je grupa. Zistite, či táto grupa je komutatívna. (Ak áno, tak to dokážte. Ak nie, nájdite **konkrétny** kontrapríklad.)

Termín na odovzdanie: cvičenia počas štvrtého týždňa semestra (11. októbra).

Nech $(G, *)$ je grupa a $a \in G$. Dokážte, že zobrazenie $f_a \colon G \to G$ určené predpisom

$$f_a(x) = a * x * a^{-1}$$

je bijekcia.

Termín na odovzdanie: cvičenia počas piateho týždňa semestra (18. októbra).

Vieme, že množina $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ s binárnou operáciou definovanou ako

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$$

tvorí grupu a táto grupa nie je komutatívna.[1] Vieme tiež, že neutrálny prvok je dvojica $(1, 0)$ a inverzný prvok sa dá vyjadriť ako $(a, b)^{-1} = (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$.

V každej z nasledujúcich častí zistite, či daná podmnožina je podgrupa grupy G. Ak je to podgrupa, tak zistite aj to, či je táto podgrupa komutatívna. Jasne uveďte odpovede na obe otázky: Je to podgrupa? Je komutatívna? A uveďte aj zdôvodnenie, prečo to je tak.
a) $H_1 = \{(a, b) \in G; a = 1\}$
b) $H_2 = \{(a, b) \in G; b = 0\}$
c) $H_3 = \{(a, b) \in G; a = b\}$

[1] Bola to jedna z predchádzajúcich úloh – pre tých, ktorí ju neriešili, som tu zosumarizoval nejaké veci. Niečo k nej je napísané aj tu: `https://msleziak.com/forum/viewtopic.php?t=963` a `https://msleziak.com/forum/viewtopic.php?t=498`.

Termín na odovzdanie: cvičenia počas šiesteho týždňa semestra (25. októbra).

Je relácia $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy \geq 0\}$ na množine $M = \mathbb{R}$ reflexívna, symetrická, tranzitívna? (Svoju odpoveď v každej z troch častí jasne označte a uveďte aj zdôvodenie – buď vysvetlenie prečo daná vlastnosť platí alebo konkrétny kontrapríklad!)

Termín na odovzdanie: cvičenia počas ôsmeho týždňa semestra (8. novembra).
Interval na odovzdanie je teraz dva týždne, keďže 1. novembra sa neučí (štátny sviatok).

Pre zadané grupy G a G' nájdite takú podgrupu H grupy G, že platí $G/H \cong G'$. (Alebo zdôvodnite, že taká podgrupa H v grupe G neexistuje.)
a) $G = (\mathbb{Z}_9, +)$ a $G' = (\mathbb{Z}_3, +)$
b) $G = (\mathbb{Z}_9, +)$ a $G' = (\mathbb{Z}_4, +)$

Termín na odovzdanie: cvičenia počas deviateho týždňa semestra (15. novembra).

Overte, že 113 je prvočíslo. Vypočítajte pomocou *Euklidovho algoritmu* čomu sa rovná a^{-1} v $\mathbb{Z}_{113}$ pre $a = 42$.

Termín na odovzdanie: cvičenia počas desiateho týždňa semestra (22. novembra).

Máme danú sústavu lineárnych rovníc nad poľom $\mathbb{R}$ s parametrom $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2x - 6y - 4z &= 16 \\ ax - y - 4z &= 6 \\ 2x - 3y - 4z &= 10 \end{aligned}$$

a) Zistite ako vyzerá množina všetkých riešení tejto sústavy pre $a = 2$.
b) Zistite ako vyzerá množina všetkých riešení tejto sústavy pre $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Uveďte aj výpočty, ktorými ste sa dostali k riešeniu.

Termín na odovzdanie: cvičenia počas jedenásteho týždňa semestra (29. novembra).

Pre zadané podpriestory $S_1 = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$ a $S_2 = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3]$ priestoru $(\mathbb{Z}_7)^4$ zistite:
a) Či platí $S_1 \subseteq S_2$.
b) Či platí $S_2 \subseteq S_1$.
Uveďte aj zdôvodnenie a výpočty, ktorými ste sa dostali k svojej odpovedi.

Podpriestor S_1 je generovaný vektormi:

$$\vec{a}_1 = (2, 1, 4, 5)$$
$$\vec{a}_2 = (1, 3, 0, 5)$$
$$\vec{a}_3 = (3, 5, 6, 4)$$

Podpriestor S_2 je generovaný vektormi:

$$\vec{b}_1 = (1, 2, 5, 3)$$
$$\vec{b}_2 = (4, 3, 3, 2)$$
$$\vec{b}_3 = (2, 3, 1, 0)$$

Termín na odovzdanie: cvičenia počas dvanásteho týždňa semestra (6. decembra).

Nech $f\colon (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^4$ je lineárne zobrazenie, pričom máme zadané, že

$$f(1,1,2) = (0,2,3,1)$$
$$f(2,2,1) = (4,1,3,4)$$

Odpovedajte na tieto otázky (nemusíte nutne v takomto poradí):
a) Viete povedať, čomu sa rovná $f(1,1,0)$ a $f(0,0,1)$? Sú obrazy týchto vektorov zadanými informáciami jednoznačne určené?
b) Existuje lineárne zobrazenie f s uvedenými vlastnosťami?
c) Je lineárne zobrazenie f týmito podmienkami jednoznačne určené?
d) Napíšte maticu aspoň jedného zobrazenia f, ktoré spĺňa tieto podmienky. (Ak také zobrazenie existuje.)

Svoje odpovede zdôvodnite!

Termín na odovzdanie: cvičenia počas posledného týždňa semestra (13. decembra).

Zistite pre aké hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$ existuje inverzná matica A^{-1} a pre tieto hodnoty ju aj vypočítajte.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$$

Termín na odovzdanie: 15. januára (po prvých dvoch týždňoch skúškového obdobia).

Máme podpriestory S a T v priestore $(\mathbb{Z}_5)^4$ zadané ako:

$$S = [(1,1,4,2),(1,2,2,3),(4,1,2,0)]$$
$$T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{Z}_5^4; x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}$$

Nájdite sústavu rovníc takú, že jej množina riešení je práve podpriestor S. Zistite aká je dimenzia priestorov $S \cap T$ a $S + T$. (Svoje tvrdenie zdôvodnite.)