Deliteľnosť

20. septembra 2020

Veta o delení so zvyškom

Veta (Veta o delení so zvyškom)

Nech a, b sú celé čísla, $b > 0$. Potom existujú celé čísla q a r také, že

$$a = b \cdot q + r \qquad a \qquad 0 \leq r < b.$$

Navyše, q a r sú týmito podmienkami jednoznačne určené.

Definícia deliteľnosti

Definícia

Ak a, b sú celé čísla, tak hovoríme, že a *delí* b ak existuje také $c \in \mathbb{Z}$, že $b = ac$. Označujeme $a \mid b$.

Napríklad:

- $3 \mid 9$
- $3 \nmid -7$

Vlastnosti deliteľnosti

- $a \mid 0$, $1 \mid a$, $a \mid a$.
- Ak $a \neq 0$, tak $0 \nmid a$.
- Ak $a \mid b$ a $b \mid c$, tak $a \mid c$.
- Ak $a \mid b$ a $a \mid c$, tak $a \mid mb + nc$.
- Ak $a \mid b$ a $b \mid a$, tak $a = \pm b$.

Vlastnosti deliteľnosti

- $a \mid b$ práve vtedy, keď $|a| \mid |b|$.
- Ak $a, b \in \mathbb{N}$ a $a \mid b$, tak $a \leq b$.
- Ak $a, b \in \mathbb{N}$ sú také, že $a \mid b$ a $b \mid a$, tak $a = b$.
- Ak $ab \mid ac$ a $a \neq 0$, tak $b \mid c$.

Najväčší spoločný deliteľ

Definícia

Nech $a, b \in \mathbb{Z}$. Prirodzené číslo d sa nazýva *najväčší spoločný deliteľ* čísel a a b, ak

(i) $d \mid a$, $d \mid b$,

(ii) pre všetky čísla $c \in \mathbb{Z}$ také, že $c \mid a$, $c \mid b$ platí $c \leq d$.

Najväčší spoločný deliteľ čísel a a b označujeme (a, b).

Ak $(a, b) = 1$, čísla a a b voláme *nesúdeliteľné*, v opačnom prípade hovoríme, že sú *súdeliteľné*.

Lema

Ak $a \neq 0$ alebo $b \neq 0$, tak existuje najväčší spoločný deliteľ čísel a a b.

Bézoutova identita

Veta (Bézoutova identita)

Nech $a, b \in \mathbb{Z}$, aspoň jedno z nich je nenulové. Nech $d = (a, b)$. Potom existujú čísla $u, v \in \mathbb{Z}$ také, že

$$d = au + bv.$$

Navyše d je najmenšie prirodzené číslo, ktoré možno zapísať v takomto tvare.

Dôsledok

Nech $a, b, c \in \mathbb{Z}$ a aspoň jedno z čísel je nenulové. Ak $c \mid a$ a $c \mid b$, tak $c \mid (a, b)$.

Euklidova lema

Lema (Euklidova lema)

Ak $a, b, c \in \mathbb{Z}$*,* $a \mid bc$ *a* $(a, b) = 1$*, tak* $a \mid c$*.*

Dôsledok

Ak a*,* b *sú nenulové celé čísla a existujú* $x, y \in \mathbb{Z}$ *také, že* $ax + by = 1$*, tak* $(a, b) = 1$*.*

Lema

Ak $a, b, c \in \mathbb{Z}$*,* $(a, b) = 1$*,* $a \mid c$ *a* $b \mid c$*, tak* $ab \mid c$*.*

Vlastnosti n.s.d.

Lema (Základné vlastnosti n.s.d.)

Vo všetkých častiach predpokladáme, že čísla vystupujúce v jednotlivých rovnostiach sú také, že obe strany rovnosti sú definované.

(i) *Ak* $c = k \cdot b + a$, *tak* $(a, b) = (b, c)$.

(ii) *Ak* $(a, b) = 1$ *a* $(a, c) = 1$, *tak* $(a, bc) = 1$.

(iii) *Ak* $(a, b_i) = 1$ *pre každé* $i = 1, \dots, k$, *tak* $(a, b_1 \dots b_k) = 1$.

(iv) *Ak* $(a, c) = 1$, *tak* $(a, bc) = (a, b)$.

(v) *Ak* $d = (a, b)$, *tak* $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.

(vi) $(ka, kb) = k(a, b)$

Multiplikatívnosť n.s.d.

Lema

Nech $m, n \in \mathbb{N}$. *Ak* $(m, n) = 1$ *a* $d \mid mn$, *tak existujú jednoznačne určené čísla* $u, v \in \mathbb{N}$ *také, že* $d = uv$, $u \mid m$ *a* $v \mid n$. *(Konkrétne sú to čísla* $u = (d, m)$ *a* $v = (d, n)$*.)*

Dôsledok

Ak $a, b, c \in \mathbb{N}$ *a* $(a, b) = 1$, *tak* $(ab, c) = (a, c)(b, c)$.

Najmenší spoločný násobok

Definícia

Nech $a, b \in \mathbb{Z}$. Prirodzené číslo n sa nazýva *najmenší spoločný násobok* čísel a a b, ak

(i) $a \mid n$, $b \mid n$,

(ii) pre všetky čísla $c \in \mathbb{N}$ také, že $a \mid c$, $b \mid c$ platí $n \leq c$.

Najmenší spoločný násobok čísel a a b označujeme $[a, b]$.

Veta

Ak a, b sú ľubovoľné prirodzené čísla rôzne od 0, tak

$$[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}.$$