

# Množiny a operácie s nimi

26. februára 2022

Hlavný cieľ tejto prednášky:

- ▶ Pojem veľkosti (kardinality) pre nekonečné množiny.
- ▶ Aritmetika s kardinálnymi číslami.
- ▶ Aplikácie kardinálnych čísel.

Predtým potrebujeme vedieť niečo o množinách a zobrazeniach.

# Georg Cantor

Georg Cantor - zakladateľ teórie množín

1874 - dôkaz o existencii transcendentných čísel

Nepoužíval axiomatický prístup – tzv. naivná teória množín.

Množina = súhrn objektov určených nejakou vlastnosťou.

# Russellov paradox

Spomedzi všetkých množín vyberieme tie množiny, ktoré nie sú prvkom samej seba.

$$A = \{x; x \notin x\}$$

Ak  $A \in A$ , tak  $A \notin A$  – spor.

Ak  $A \notin A$ , tak  $A \in A$  – spor.

# Axiomatická teória množín

Riešenie paradoxov:

- ▶ Axiomatická teória množín (neskôr).
- ▶ Pracovať iba s jednoduchými množinami, ako  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$  a množinami, ktoré z nich vieme dostať základnými operáciami.

# Príklady množín

$\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N}; (\exists a, b \in \mathbb{N}) a^2 + b^2 = x\}$$

$$C = \{2x; x \in \mathbb{N}\}$$

Z nich môžeme tvoriť ďalšie množiny.

## Logické spojky

$p$	$\neg p$
1	0
0	1

$p$	$q$	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$p$	$q$	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

## Tautológie

$p$	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1



## Tautológie

$$\neg(p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \quad \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad \neg p \wedge \neg q$$

$p$	$q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1

## Obmena implikácie

$p$	$q$	$\neg q$	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

# Výroky s kvantifikátormi

## Definícia

Výrok  $(\forall x)P(x)$  znamená, že pre každý objekt  $x$  platí výrok  $P(x)$ .

Symbol  $\forall$  nazývame *všeobecný kvantifikátor*.

Výrok  $(\exists x)P(x)$  znamená, že existuje taký objekt  $x$ , pre ktorý platí výrok  $P(x)$ . Symbol  $\exists$  nazývame *existenčný kvantifikátor*.

# Výroky s kvantifikátormi

$$\begin{aligned}(\forall x \in A)P(x) &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x)(x \in A \Rightarrow P(x)) \\ (\exists x \in A)P(x) &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists x)(x \in A \wedge P(x))\end{aligned}$$

# Výroky s kvantifikátormi

$$\neg[(\forall x)P(x)] \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x).$$

## Definície

$$A = B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall z)(z \in A \Leftrightarrow z \in B)$$

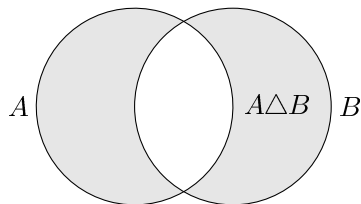
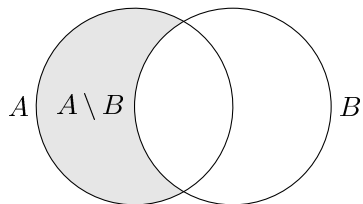
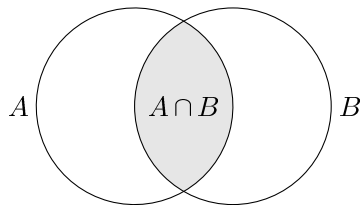
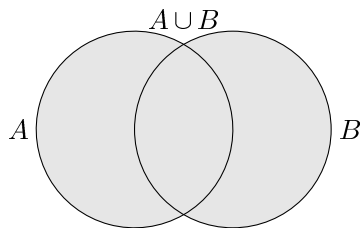
$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

## Vennove diagramy



## Inklúzia

$$A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall z)(z \in A \Rightarrow z \in B)$$

Vlastná podmnožina:

$$A \subsetneq B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$$

Potenčná množina:

$$\mathcal{P}(A) = \{B; B \subseteq A\}$$



# Vlastnosti inklúzie

## Tvrdenie

*Nech  $A, B, C$  sú ľubovoľné množiny. Potom platí:*

- ▶ *Pre každú množinu platí  $A \subseteq A$ .*
- ▶  *$A = B$  práve vtedy, keď  $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ .*
- ▶ *Ak platí  $A \subseteq B$  a  $B \subseteq C$ , tak  $A \subseteq C$ .*

Identity pre  $\cup$  a  $\cap$ 

## Tvrdenie

Nech  $A, B, C$  sú množiny. Potom platí:

- (i)  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ,  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$   
(asociatívnosť operácií  $\cup$  a  $\cap$ );
- (ii)  $A \cup B = B \cup A$ ,  $A \cap B = B \cap A$  (komutatívnosť operácií  $\cup$  a  $\cap$ );
- (iii)  $\emptyset \cup A = A$ ,  $\emptyset \cap A = \emptyset$ ;
- (iv)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ,  
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  (distributívnosť);
- (v)  $A \cap A = A$ ,  $A \cup A = A$  (idempotentosť operácií  $\cup$  a  $\cap$ );
- (vi)  $A \cap (A \cup B) = A$ ,  $A \cup (A \cap B) = A$  (zákony absorpcie).

## Zjednotenie a prienik systému množín

$$\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A := \{z; (\exists A \in \mathcal{S}) z \in A\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{z; (\exists i \in I) z \in A_i\}$$

$$\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A := \{z; (\forall A \in \mathcal{S}) z \in A\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{z; (\forall i \in I) z \in A_i\}$$

$\bigcap \mathcal{S}$  definujeme len pre  $\mathcal{S} \neq \emptyset$

## Zjednotenie a prienik systému množín

## Tvrdenie

*Nech  $S$  a  $B$  sú ľubovoľné množiny. Potom platí:*

$$B \cap \bigcup_{A \in S} A = \bigcup_{A \in S} (B \cap A);$$

$$B \cup \bigcap_{A \in S} A = \bigcap_{A \in S} (B \cup A).$$

# Analógia s označením pre súčet a súčin

$x + y$	$A \cup B$	$x \cdot y$	$A \cap B$
$\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$	$\bigcup_{i \in I} A_i$	$\prod_{n \in \mathbb{N}} x_n$	$\bigcap_{i \in I} A_i$
$\sum_{i=0}^n x_i$	$\bigcup_{i=0}^n A_i$	$\prod_{i=0}^n x_i$	$\bigcap_{i=0}^n A_i$
$\sum_{i=0}^{\infty} x_i$	$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$	$\prod_{i=0}^{\infty} x_i$	$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$

# Inklúzia, prienik a zjednotenie

## Tvrdenie

Nech  $A$  a  $B$  sú množiny. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i)  $A \subseteq B$ ;
- (ii)  $A = A \cap B$ ;
- (iii)  $B = A \cup B$ .

## Tvrdenie

Nech  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sú množiny. Potom platí:

- (i)  $\emptyset \subseteq A$ ;
- (ii)  $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ ;
- (iii) Ak  $A \subseteq B$ , tak  $A \cap C \subseteq B \cap C$  a  $A \cup C \subseteq B \cup C$ .

## Identy pre množinový rozdiel

- (i)  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C),$   
 $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C);$
- (ii)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C;$
- (iii)  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C);$
- (iv)  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C),$   
 $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C);$
- (v)  $A \setminus B = A \setminus (A \cap B);$
- (vi)  $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = A \cap (C \setminus B);$
- (vii)  $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \setminus C);$

## Identity pre množinový rozdiel

$$(viii) \quad A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B);$$

$$(ix) \quad A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset.$$

$$(x) \quad A \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i), \quad A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i).$$

$$(xi) \quad \text{Ak } B \subseteq C, \text{ tak } A \setminus C \subseteq A \setminus B.$$

$$(xii) \quad \text{Ak } B \subseteq C, \text{ tak } B \setminus A \subseteq C \setminus A.$$



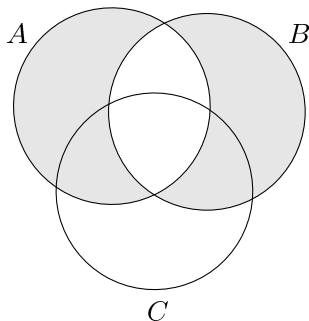
# Identity pre symetrickú diferenciu

## Tvrdenie

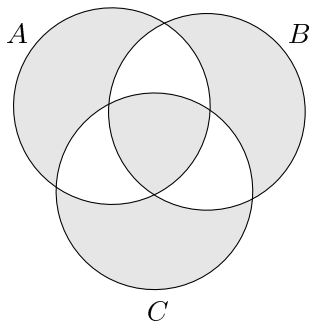
*Nech  $A, B, C$  sú množiny. Potom platí:*

- (i)  $A\Delta B = B\Delta A$ ;
- (ii)  $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ ;
- (iii)  $A\Delta A = \emptyset$ ,  $A\Delta\emptyset = A$ ;
- (iv)  $A\cup B = A\Delta B\Delta(A\cap B)$ ;
- (v)  $A\setminus B = A\Delta(A\cap B)$ .

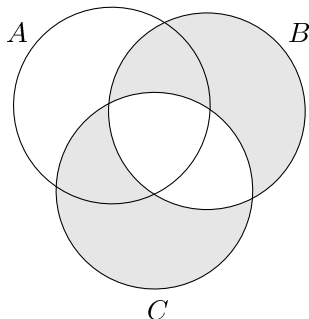
## Asociatívnosť symetrickej diferencie



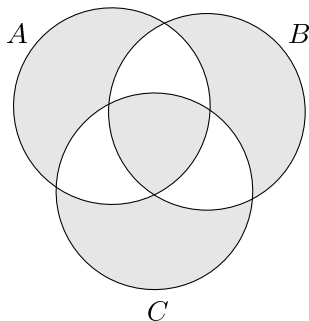
## Asociatívnosť symetrickej diferencie



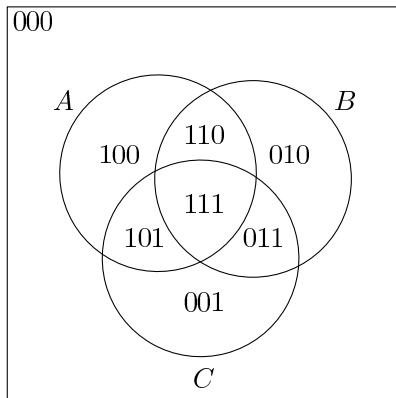
## Asociatívnosť symetrickej diferencie



## Asociatívnosť symetrickej diferencie



## Porovnanie s tabuľkou pravdivostných hodnôt



## Usporiadaná dvojica

$$(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \wedge b = d$$

# Karteziánsky súčin

## Definícia

Karteziánsky súčin množín  $A$  a  $B$  je množina, ktorej prvkami sú práve také usporiadané dvojice, kde prvý prvok patrí do množiny  $a$  a druhý prvok patrí do množiny  $b$ . Túto množinu označujeme

$$A \times B := \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$



# Karteziánsky súčin

## Tvrdenie

*Nech  $A, B, C$  sú množiny. Potom platí*

- (i)  $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$ ;
- (ii)  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ ;
- (iii)  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ ;
- (iv)  $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ .
- (v) *Ak navyše  $A, B, C, D \neq \emptyset$ , tak platí*  
 $A \times B = C \times D \Leftrightarrow A = C \wedge B = D$