

Dobre definované operácie

5. októbra 2023

Nerovnosť je dobre definovaná

$$\left. \begin{array}{l} |X| = |X'|, |Y| = |Y'| \\ |X| \leq |Y| \end{array} \right\} \Rightarrow |X'| \leq |Y'|$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h_2 \\ X' & \xrightarrow{?} & Y' \end{array}$$

Nerovnosť je dobre definovaná

$$\left. \begin{array}{l} |X| = |X'|, |Y| = |Y'| \\ |X| \leq |Y| \end{array} \right\} \Rightarrow |X'| \leq |Y'|$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 \\ X' & \xrightarrow{h_2 \circ f \circ h_1^{-1}} & Y' \end{array}$$

$\begin{array}{c} \uparrow h_1^{-1} \\ \downarrow h_1 \end{array}$

Súčet je dobre definovaný

$$\left. \begin{array}{l} |A| = |A'|, |B| = |B'| \\ A \cap B = A' \cap B' = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow |A \cup B| \leq |A' \cup B'|$$

Súčin je dobre definovaný

$$|A| = |A'|, |B| = |B'| \Rightarrow |A \times B| = |A' \times B'|$$

Súčin je dobre definovaný

$$|A| = |A'|, |B| = |B'| \Rightarrow |A \times B| = |A' \times B'|$$

Ak $f: A \rightarrow B$ a $g: A' \rightarrow B'$ sú bijekcie, tak

$$f \times g: A \times A' \rightarrow B \times B'$$

je bijekcia.

Mocnina je dobre definovaná

$$|A| = |C|, |B| = |D| \Rightarrow |A^B| = |C^D|$$

Chceme bijekciu $\varphi: A^B \rightarrow C^D$.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & D \\ \downarrow h & & \downarrow ? \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

Mocnina je dobre definovaná

$$|A| = |C|, |B| = |D| \Rightarrow |A^B| = |C^D|$$

$$\begin{array}{ccc}
 B & \begin{array}{c} \xleftarrow{g^{-1}} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & D \\
 \downarrow h & & \downarrow f \circ h \circ g^{-1} \\
 A' & \xrightarrow{f} & C
 \end{array}$$

$$\varphi: A^B \rightarrow C^D$$

$$\varphi(h) = f \circ h \circ g^{-1}$$

Mocnina je dobre definovaná

$\psi: C^D \rightarrow A^B$ podobným spôsobom ako sme našli φ .

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & D \\ \downarrow ? & & \downarrow k \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

$$\psi(k) = f^{-1} \circ k \circ g.$$

Mocnina je dobre definovaná

$$\psi(\varphi(h)) = f^{-1} \circ (f \circ h \circ g^{-1}) \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ h \circ (g^{-1} \circ g) = h$$

$$\varphi(\psi(k)) = f \circ (f^{-1} \circ k \circ g) \circ g^{-1} = (f \circ f^{-1}) \circ k \circ (g \circ g^{-1}) = k$$

$$\psi = \varphi^{-1}$$

Existuje inverzné zobrazenie k φ , teda φ je bijekcia.