

Hľadanie pevných bodov

9. februára 2022

$$f(x) = \cos x$$

$$x_0 = x, x_{n+1} = \cos x_n$$

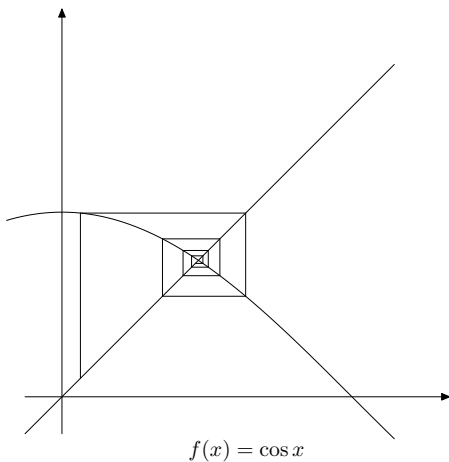


Figure: Iterácie funkcie $f(x) = \cos x$

Pevný bod

Definícia

Nech $A \subseteq \mathbb{R}$ a nech $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazenie. Bod $x \in A$ sa nazýva *pevný bod zobrazenia f* , ak platí

$$f(x) = x.$$

Iterácie funkcie f

$$x_0 = x$$

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

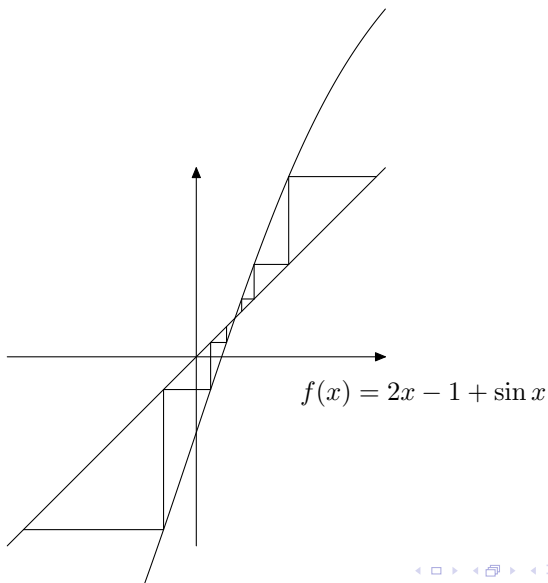
Ak je funkcia f spojitá a postupnosť (x_n) *konverguje*, tak limita bude pevný bod funkcie f .

Pre $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ dostávame

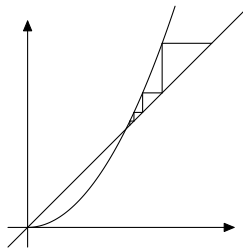
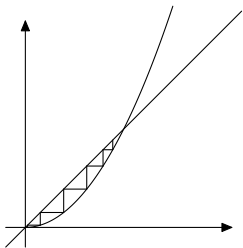
$$f(c) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = c.$$

Táto postupnosť však vo všeobecnosti nemusí konvergovať.

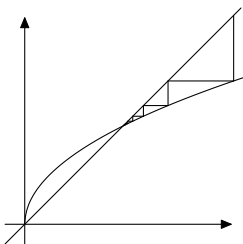
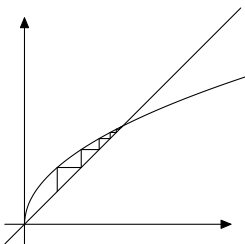
Príklad keď iterácie nekonvergujú



Konvergencia môže závisieť od voľby počiatočného bodu



$$f(x) = x^2$$



$$f(x) = \sqrt{x}$$

Banachova veta o pevnom bode

Veta (Banachova veta o pevnom bode)

Nech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia a existuje konštanta $\alpha < 1$ taká, že pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y|.$$

Potom funkcia f má práve jeden pevný bod c .

Postupnosť iterácií

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

konverguje k tomuto bodu c pre ľubovoľnú voľbu x_0 .

Babylonská metóda

$$f(x) = \frac{x + \frac{a}{x}}{2}$$

x	$y = (x + \frac{2}{x}) / 2$		y^2
1	$\frac{3}{2}$	1.5	$\frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}$	1.416,7	$\frac{289}{144} = 2 + \frac{1}{144}$
$\frac{17}{12}$	$\frac{577}{408}$	1.414,2	$\frac{332929}{166464} = 2 + \frac{1}{166464}$

$$\sqrt{2} = 1.414,213,562$$

$$577/408 = 1.414,215,686$$

Babylonská metóda

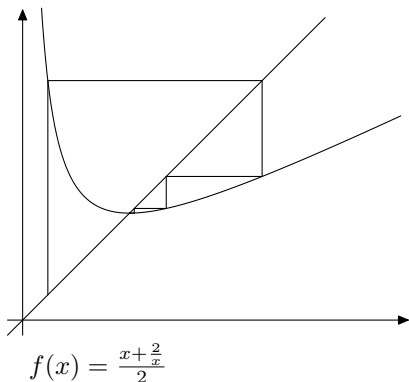


Figure: Pre funkciu $f(x) = \frac{x + \frac{2}{x}}{2}$ iterácie kovergujú k $\sqrt{2}$

Dôkaz konvergenzie

Tvrdenie

Nech

$$f(x) = \frac{x + \frac{a}{x}}{2}.$$

Potom postupnosť určená rekurzívnym predpisom

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$$

konverguje k \sqrt{a} pre ľubovoľnú voľbu $x_0 > 0$.

Dôkaz konvergencie

$$\begin{aligned}\frac{x + \frac{a}{x}}{2} - \sqrt{a} &= \frac{x^2 - 2\sqrt{a}x + a}{2x} \\ &= \frac{(x - \sqrt{a})^2}{2x}\end{aligned}$$

$$\left| \frac{x + \frac{a}{x}}{2} - \sqrt{a} \right| = \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{\sqrt{a}}{x} \right| \cdot |x - \sqrt{a}| < \frac{1}{2} |x - \sqrt{a}|.$$