Zadaná 21. septembra 2022. Termín odovzdania: do prednášky **28. septembra 2022**.

Vyberte si ktorúkoľvek zo zadaných úloh. (Ak chcete, môžete odovzdať aj obe.)

---

**Úloha 1.** Zdôvodnite, že ak máme zadané úsečky dĺžok $x$ a $y$, tak pomocou pravítka a kružidla vieme skonštruovať aj úsečku dĺžky $\sqrt{xy}$.

**Úloha 2*.** Nech $p_1, \dots, p_n$ sú rôzne prvočísla. Dokážte, že potom ich logaritmy $\ln p_1, \dots, \ln p_n$ sú lineárne nezávislé nad $\mathbb{Q}$. (Hint: Rovnosť $c_1 \ln p_1 + \cdots + c_n \ln p_n = 0$ je ekvivalentná s $p_1^{c_1} \cdots p_n^{c_n} = 1$. Viete dostať takúto rovnosť s celočíselnými exponentami?)

Zadaná 28. septembra 2022. Termín odovzdania: do prednášky **5. októbra 2022**.

---

**Úloha 1.** Rozhodnite, či dané tvrdenie platí. Ak áno, dokážte ho. Ak nie, nájdite **konkrétny** kontrapríklad.

a) Nech $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$ sú zobrazenia. Ak $g \circ f$ je injektívne, tak aj $g$ je injektívne.

b) Nech $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$ sú zobrazenia. Ak $g \circ f$ je injektívne, tak aj $f$ je injektívne.

Zadaná 5. októbra 2023. Termín odovzdania: do prednášky **12. októbra 2023**.

---

**Úloha 1.** Rozhodnite, či takéto tvrdenie platí. Ak áno, tak ho dokážte. Ak nie, tak nájdite kontrapríklad.

Ak $A$, $B$ sú ľubovoľné množiny, tak platí

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|.$$

Drobné poznámky: Zdôrazním to, že by som chcel naozaj vidieť dôkaz, ktorý využíva takú definíciu súčtu kardinálnych čísel, akú sme videli na prednáške. Oplatí sa uvedomiť si, že teraz chceme pracujeme aj s *nekonečnými* množinami – rovnaký argument, aký ste videli v nižších ročníkoch pre konečné množiny možno nebude fungovať. (Čiže na takéto niečo si treba dať aspoň trochu pozor.)

Zadaná 12. októbra 2023. Termín odovzdania: do prednášky **19. októbra 2023**.

---

**Úloha 1.** Dokážte, nasledujúce tvrdenia – pričom je povolené používať len veci, ktoré už boli na prednáške. (Definície, vlastnosti rovnosti a nerovnosti, Cantor–Bernsteinova veta, ... T.j. skúsiť to bez použitia vecí, ktoré v texte dokázané napríklad o súčte kardinálnych čísel.) Vlastne celý tento dlhý pokec smeruje najmä k tomu, že by ste to mali skúsiť bez použitia výsledku, že platí: $|A| \geq \aleph_0 \Rightarrow |A| + \aleph_0 = |A|$. (Takýto fakt zanedlho dokážeme, keď sa začneme zaoberať vlastnosťami súčtu kardinálnych čísel.)
a) $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$;
b) $|\mathbb{N}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

Zadaná 26. októbra 2023. Termín odovzdania: do prednášky **9. novembra**.
Interval na odovzdávanie je teraz dva týždne – budúci štvrtok je rektorské voľno.

---

**Úloha 1.** Nech $A$, $B$, $C$ sú množiny, pričom množina $C$ je neprázdna, a $f\colon A \to B$ je zobrazenie.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Potom môžeme definovať zobrazenie $\varphi\colon C^B \to C^A$ predpisom

$$\varphi(g) = g \circ f.$$

Dokážte, alebo nájdite kontrapríklad:
Ak $f$ je injektívne, tak $\varphi$ je injektívne.

Drobné poznámky: Zdôrazním to, že by som chcel naozaj vidieť dôkaz, ktorý využíva takú definíciu súčtu kardinálnych čísel, akú sme videli na prednáške. Oplatí sa uvedomiť si, že teraz chceme pracujeme aj s *nekonečnými* množinami – rovnaký argument, aký ste videli v nižších ročníkoch pre konečné množiny možno nebude fungovať. (Čiže na takéto niečo si treba dať aspoň trochu pozor.)

Zadaná 26. októbra 2023. Termín odovzdania: do prednášky **16. novembra**.
Interval na odovzdávanie som nechal dlhší – aby ste na ten istý termín nemuseli odovzdávať dve úlohy.

Vyberte si v prvej aj v druhej časti jednu z úloh a) až d). (T.j. ak budete odovzdávať túto úlohu, mali by ste vypočítať jeden kardinál z časti 1 a jeden kardinál z časti 2.)

---

**Úloha 1.**

1. Vypočítajte (t.j. zistite, či je daný kardinál rovný niektorému z čísel $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$, $2^{\mathfrak{c}}$, $2^{2^{\mathfrak{c}}}$):
   a) $\mathfrak{c}^{\aleph_0}$; b) $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$; c) ${\aleph_0}^{\mathfrak{c}}$; d) $\mathfrak{c}\cdot\aleph_0$

2. Vypočítajte (t.j. zistite, či je daný kardinál rovný niektorému z čísel $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$, $2^{\mathfrak{c}}$, $2^{2^{\mathfrak{c}}}$):
   a) $(2^{\mathfrak{c}})^{\aleph_0}$; b) ${\aleph_0}^{2^{\mathfrak{c}}}$; c) $2^{\mathfrak{c}}\cdot 2^{2^{\mathfrak{c}}}$; d) $(2^{\mathfrak{c}})^{\mathfrak{c}}$;

Poznámka: Môžu sa používať všetky nerovnosti a rovnosti, o ktorých sme dokázali, že platia pre všetky kardinály (alebo dôkaz je v texte k prednáške a z nejakého dôvodu sme ho preskočili) a tiež platnosť rovností $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$ a $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$. (Inak povedané: Tie veci čo sú v prehľade na stránke predmetu – v súbore `prehlad.pdf`[1] s výnimkou rovnosti $a+b=a\cdot b=\max\{a,b\}$, ktorej platnosť pre nekonečné kardinály sme iba spomenuli bez dôkazu.) Ak budete pri výpočtoch potrebovať nejaké ďalšie pomocné výsledky o kardináloch, treba uviesť aj ich dôkaz.

Ak je použitý zápis $a^{b^c}$, myslí sa tým $a^{(b^c)}$ a nie $(a^b)^c$. (Čo je asi vcelku prirodzené, lebo $(a^b)^c$ by sme mohli prepísať ako $a^{bc}$; ale pre istotu som to zdôraznil.)

[1] `https://msleziak.com/vyuka/2023/vpa/prehlad.pdf`

Zadaná 9. novembra 2023. Termín odovzdania: do prednášky **23. novembra 2023**.

Vyberte si v prvej aj v druhej časti jednu z úloh a) až d). (T.j. ak budete odovzdávať túto úlohu, mali by ste vypočítať jeden kardinál z časti 1 a jeden kardinál z časti 2.)

---

**Úloha 1.**

1. Nájdite kardinalitu danej množiny:
   a) $\mathbb{C} \times \mathbb{Q}$; b) $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$; c) $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$; d) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$;

2. Nájdite kardinalitu danej množiny:
   a) $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$; b) $\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}$; c) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$; d) $\mathbb{C}^{\mathbb{Q}}$;

Poznámka: Môžu sa používať všetky nerovnosti a rovnosti, o ktorých sme dokázali, že platia pre všetky kardinály (alebo dôkaz je v texte k prednáške a z nejakého dôvodu sme ho preskočili) a tiež platnosť rovností $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ a $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. (Inak povedané: Tie veci čo sú v prehľade na stránke predmetu – v súbore `prehlad.pdf`[1] s výnimkou rovnosti $a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$, ktorej platnosť pre nekonečné kardinály sme iba spomenuli bez dôkazu.) Takisto môžete používať známe kardinality číselných množín: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ a $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = \mathfrak{c}$. Ak budete pri výpočtoch potrebovať nejaké ďalšie pomocné výsledky o kardináloch, treba uviesť aj ich dôkaz.

Výsledok by mal byť upravený na niektoré z kardinálnych čísel $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$, $2^{\mathfrak{c}}$, $2^{2^{\mathfrak{c}}}$.

[1] `https://msleziak.com/vyuka/2023/vpa/prehlad.pdf`

Zadaná 15. novembra 2023. Termín odovzdania: do prednášky **30. novembra 2023**.

Vyberte si jednu zo štyroch úloh a) až d).

---

**Úloha 1.** Zistite, či uvedené tvrdenie platí pre ľubovoľné nekonečné kardinálne čísla $a$, $b$, $c$. Ak platí, tak ho dokážte. Ak nie uveďte kontrapríklad (a zdôvodnite, že je to skutočne kontrapríklad).

a) $a^b = a^c \Rightarrow b = c$

b) $b^a = c^a \Rightarrow b = c$

c) $a^b \leq a^c \Rightarrow b \leq c$

d) $b^a \leq c^a \Rightarrow b \leq c$

Poznámka: Môžu sa používať všetky nerovnosti a rovnosti, o ktorých sme dokázali, že platia pre všetky kardinály (alebo dôkaz je v texte k prednáške a z nejakého dôvodu sme ho preskočili) a tiež platnosť rovností $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ a $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. (Inak povedané: Tie veci čo sú v prehľade na stránke predmetu – v súbore `prehlad.pdf`[1] s výnimkou rovnosti $a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$, ktorej platnosť pre nekonečné kardinály sme iba spomenuli bez dôkazu.) Takisto môžete používať známe kardinality číselných množín: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ a $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = \mathfrak{c}$. Ak budete pri výpočtoch potrebovať nejaké ďalšie pomocné výsledky o kardináloch, treba uviesť aj ich dôkaz.

[1] `https://msleziak.com/vyuka/2023/vpa/prehlad.pdf`

Zadaná 23. novembra 2023. Termín odovzdania: do prednášky **7. decembra 2023**.

---

**Úloha 1.** Dané množiny usporiadajte podľa kardinality. Svoje tvrdenia zdôvodnite! (T.j. očakáva sa napríklad odpoveď v tvare napríklad $|A| < |C| = |D| < |B|$ a zdôvodnenie všetkých uvedených nerovností a rovností.)

Množiny s ktorými pracujete sú: $A = \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$, $B = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $C = \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$, $D =$množina všetkých spojitých zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Poznámka: Môžu sa používať všetky nerovnosti a rovnosti, o ktorých sme dokázali, že platia pre všetky kardinály (alebo dôkaz je v texte k prednáške a z nejakého dôvodu sme ho preskočili) a tiež platnosť rovností $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ a $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. (Inak povedané: Tie veci čo sú v prehľade na stránke predmetu – v súbore `prehlad.pdf`[1] s výnimkou rovnosti $a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$, ktorej platnosť pre nekonečné kardinály sme iba spomenuli bez dôkazu.) Takisto môžete používať známe kardinality číselných množín: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ a $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = \mathfrak{c}$. A samozrejme aj to, čo sme na prednáške dokázali o kardinalite množiny spojitých zobrazení. Ak budete pri výpočtoch potrebovať nejaké ďalšie pomocné výsledky o kardináloch, treba uviesť aj ich dôkaz.

[1] `https://msleziak.com/vyuka/2023/vpa/prehlad.pdf`

Zadaná 29. novembra 2023. Termín odovzdania: do prednášky **14. decembra 2023**.

Vyberte si jednu z troch zadaných úloh a) až c).

---

**Úloha 1.** Postupnosť $(a_n)$ sa volá *takmer stacionárna,* ak

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \geq m) a_n = a_m.$$

Inými slovami, od určitého čísla $m$ sú už všetky členy tejto postupnosti rovnaké.

Dokážte, že:
a) množina všetkých takmer stacionárnych postupností čísel 0, 1 má kardinalitu $\aleph_0$;
b) množina všetkých takmer stacionárnych postupností prirodzených čísel má kardinalitu $\aleph_0$;
c) množina všetkých takmer stacionárnych postupností reálnych čísel má kardinalitu $\mathfrak{c}$.