

Zobrazenia

27. septembra 2023

- ▶ Definovať $|X| = |Y|$ (pomocou bijekcie).
- ▶ Definovať $|X| \leq |Y|$ (pomocou injekcie).
- ▶ Chceme vedieť sčítavať, násobiť, umocňovať.
- ▶ Najprv: Pripomeňme niečo o zobrazeniach.

Funkcie

Definícia

Zobrazenie (*funkcia*) z množiny A do B je podmnožina $f \subseteq A \times B$ karteziánskeho súčinu množín A a B taká, že pre každé $a \in A$ existuje práve jedno $b \in B$ s vlastnosťou $(a, b) \in f$.

$$(\forall a \in A)(\exists! b \in B)(a, b) \in f$$

Zobrazenie f z A do B budeme označovať $f: A \rightarrow B$. Množinu A nazývame *definičný obor* a B *obor hodnôt* zobrazenia f .

Namiesto zápisu $(a, b) \in f$ budeme používať zápis $f(a) = b$.

Zúženie zobrazenia

Definícia

Ak $f: A \rightarrow B$ je zobrazenie a $C \subseteq A$, tak zobrazenie $f|_C: C \rightarrow B$, definované predpisom

$$f|_C(x) = f(x)$$

pre všetky $x \in C$, nazývame *zúženie zobrazenia f* na množinu C .

$$f|_C = f \cap (C \times B)$$

Prázdne zobrazenie

- ▶ Ak $X = \emptyset$ alebo $Y = \emptyset$, tak $X \times Y = \emptyset$.
- ▶ Teda ak $f \subseteq X \times Y$, tak $f = \emptyset$.
- ▶ Je $\emptyset: \emptyset \rightarrow \emptyset$ zobrazenie?
- ▶ Ak $X \neq \emptyset$, existuje zobrazenie $X \rightarrow \emptyset$?
- ▶ Ak $Y \neq \emptyset$, existuje zobrazenie $\emptyset \rightarrow Y$?

Prázdne zobrazenie

$$(\forall x \in A)P(x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x)(x \in A \Rightarrow P(x))$$

$$(\exists x \in A)P(x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists x)(x \in A \wedge P(x))$$

$$(\forall x \in \emptyset)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in \emptyset \Rightarrow P(x))$$

$$(\exists x \in \emptyset)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)(x \in \emptyset \wedge P(x))$$

Skladanie zobrazení

Definícia

Ak $f: A \rightarrow B$ a $g: B \rightarrow C$ sú zobrazenia, tak zložené zobrazenie $g \circ f: A \rightarrow C$ definujeme ako zobrazenie určené predpisom:

$$g \circ f(a) = g(f(a)) \text{ pre každé } a \in A.$$

Skladanie zobrazeni

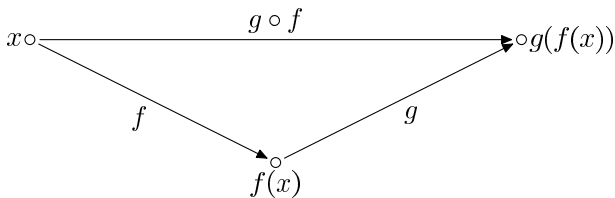


Figure: Skladanie zobrazeni

Injekcia, surjekcia a bijekcia

Definícia

Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie.

- ▶ f je *injektívne*, ak $(\forall x, y \in X) x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- ▶ f je *surjektívne*, ak $(\forall y \in Y) (\exists x \in X) f(x) = y$.
- ▶ f je *bijektívne*, ak je súčasne injektívne aj surjektívne.

Zloženie dvoch injekcií (surjekcií, bijekcií) je opäť injekcia (surjekcia, bijekcia).

Poznámka

Ekvivalentná definícia injekcie: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Injekcia, surjekcia a bijekcia

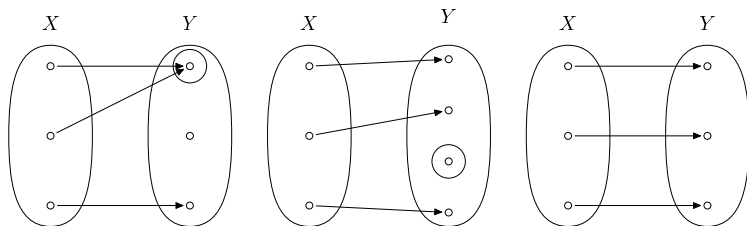


Figure: Ilustrácia injekcie, surjekcie a bijekcie

Injekcie, surjekcie, bijekcie a skladanie

Pre zobrazenia $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ platí:

- ▶ Ak f aj g sú injekcie, tak aj $g \circ f$ je injekcia.
- ▶ Ak f aj g sú surjekcie, tak aj $g \circ f$ je surjekcia.
- ▶ Ak f aj g sú bijekcie, tak aj $g \circ f$ je bijekcia.

Inverzné zobrazenie

Definícia

Nech $f: A \rightarrow B$ je zobrazenie. Ak existuje zobrazenie $g: B \rightarrow A$ také, že

$$g \circ f = id_A$$

$$f \circ g = id_B$$

tak hovoríme, že g je *inverzné zobrazenie* k zobrazeniu f a označujeme ho f^{-1} .

Definícia inverzného zobrazenia vlastne hovorí, že:

$$(\forall a \in A)g(f(a)) = a$$

$$(\forall b \in B)f(g(b)) = b$$

Inverzné zobrazenie

Tvrdenie

Nech $f: A \rightarrow B$ je zobrazenie. Potom inverzné zobrazenie $f^{-1}: B \rightarrow A$ existuje práve vtedy, keď f je bijekcia.

Karteziánsky súčin funkcií

Definícia

Nech $f: A \rightarrow C$, $g: B \rightarrow D$ sú zobrazenia. Potom ich *karteziánsky súčin* je zobrazenie $f \times g: A \times B \rightarrow C \times D$ určené predpisom

$$f \times g(a, b) = (f(a), g(b)).$$

Karteziánsky súčin funkcií

Tvrdenie

Nech $f: A \rightarrow C$, $g: B \rightarrow D$ sú zobrazenia.

- i. Ak f aj g sú injekcie, tak $f \times g$ je injekcia.*
- ii. Ak f aj g sú surjekcie, tak $f \times g$ je surjekcia.*
- iii. Ak f aj g sú bijekcie, tak $f \times g$ je bijekcia.*