Cvičenie 1 - grupy, podgrupy

Úloha 1. Nech $(G, *_G)$ a $(H, *_H)$. Ukáže, množina $G \times H$ spolu s operáciou $*$ definovanou ako

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 *_G g_2, h_1 *_G h_2)$$

tvorí grupu.

Úloha 2. Nech $(G, \cdot)$ je grupa a $P(G)$ je systém všetkých podmnožín G. Dokážte, že operácia $\cdot$ na množine $P(G)$ daná predpisom

$$A \cdot B = \{a \cdot b; a, b \in G\}$$

je asociatívna. Tvorí $P(G) \setminus \{\emptyset\}$ s touto operáciou grupu?

Úloha 3. Dokážte, že matice typu $n \times n$, ktorých determinant je rovný 1, s operáciou násobenia matíc tvoria grupu.

Úloha 4. Matice typu $n \times n$, ktoré v každom riadku a každom stĺpci majú práve jednu jednotku a ostatné prvky sú nulové, s operáciou násobenia matíc tvoria grupu. (Hint: Súvisia tieto matice nejako s permutáciami? Akým lineárnym zobrazeniam zodpovedajú?)

Úloha 5. Ak A, B, C sú podgrupy G a $C \subseteq A \cup B$, tak $C \subseteq A$ alebo $C \subseteq B$.

Úloha 6. Ukážte, že $H = \{\frac{m}{n}; m, n \text{ sú nepárne}\}$ je podgrupa grupy $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.