Cvičenie 2 - podgrupy

Úloha 1. Ukážte, že $H = \{\frac{m}{n}; m, n \text{ sú nepárne}\}$ je podgrupa grupy $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Úloha 2. Tvorí daná podmnožina podgrupu danej grupy:
a) $\mathbb{N}$ v $(\mathbb{Z}, +)$;
b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ v $(\mathbb{R}^2, +)$;
c) $\{z \in \mathbb{C}; z^5 = 1\}$ v $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$;
d) $\{id, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)\}$ v $(S_3, \circ)$;
e) $\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right); a, b \in \mathbb{R}\}$ v grupe všetkých regulárnych matíc 2×2 s operáciou násobenia matíc.

Úloha 3. Ak A, B, C sú podgrupy G a $C \subseteq A \cup B$, tak $C \subseteq A$ alebo $C \subseteq B$.

Úloha 4. Nájdite príklad nekonečnej grupy, ktorá obsahuje netriviálnu konečnú podgrupu. (Pod netriviálnou podgrupou tu rozumieme podgrupu, ktorá má viac ako jeden prvok.)

Úloha 5. Nájdite všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (súčin dvoch grúp sme definovali na minulom cvičení) a všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_4$ (v oboch prípadoch operácia $\oplus$). Majú tieto grupy rovnaký počet dvojprvkových podgrúp? (Z toho, čo sa naučíme neskôr sa na základe tejto úvahy bude dať zdôvodniť, že tieto dve grupy nie sú izomorfné.)

Úloha 6. Nech V je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$. Je aj každá podgrupa grupy $(V, +)$ podpriestorom priestoru V? Ako je to s vektorovými priestormi nad poľom $\mathbb{Z}_p$?