Cvičenie 3 - homomorfizmy, izomorfizmy

Na pripomenutie: Homomorfizmus $f\colon (G,\circ) \to (H,*)$

$$f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) * f(g_2)$$

Bijektívny homomorfizmus voláme izomorfizmus (injektívny homomorfizmus voláme monomorfizmus, surjektívny monomorfizmus voláme epimorfizmus).

Ak existuje epimorfizmus $f\colon (G,*) \to (H,\circ)$, tak hovoríme, že grupa H je homomorfným obrazom grupy G.

Úloha 1. Zistite, či sú grupy G a H izomorfné: a) $G = (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)\times(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = (\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$
b) $G = (\mathbb{Z}_6,\oplus)$, $H = (Z_2 \times Z_3,\oplus)$
c) $G = (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = (\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$
d) $G = (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2,+)$, $H = (\mathbb{Z},+)$ (Sčitovanie v $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$ chápeme tak, že na prvej súradnici používame obvyklé sčitovanie a na druhej sčitujeme modulo 2, t.j. tak ako sme definovali priamy súčin grúp.)

Úloha 2. Zistite, či sú grupy G a H izomorfné a či je grupa H homomorfným obrazom grupy G. Svoju odpoveď zdôvodnite!
a) $G = (\mathbb{R},+)\times(\mathbb{R},+)$, $H = (\mathbb{C},+)$
b) $G = (\mathbb{Q},+)$, $H = (\mathbb{R},+)$
c) $G = (\mathbb{Q},+)$, $H = (\mathbb{Q}^+,\cdot)$
d) $G = (\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$
e) $G = (\mathbb{Q},+)$, $H = (\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$

Úloha 3. Zistite, či sú grupy G a H izomorfné a či je niektorá z nich homomorfným obrazom druhej. Svoju odpoveď zdôvodnite!
a) $G = (\mathbb{R},+)$, $H = (\mathbb{R}^+,\cdot)$
b) $G = (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = (\mathbb{R}^+,\cdot)$
c) $G = (\mathbb{Z}_4,\oplus)$, $H = (\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,\oplus)$

Úloha 4. Nájdite izomorfizmus medzi $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ a $(G,\cdot)$, kde $G = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a\end{smallmatrix}\right); a,b \in \mathbb{R}, (a,b) \neq (0,0)\}$; operácia na G je obvyklé násobenie matíc. (O $(G,\cdot)$ vieme z minulého cvičenia, že je to grupa. Vedeli by sme zdôvodniť, že je to grupa, s použitím izomorfizmu nájdeného v tejto úlohe. Alebo obrátene, ak vieme, že G je grupa, mohli by sme tento fakt použiť spolu s existenciou izomorfizmu na zdôvodnenie toho, že $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ je grupa?)

Úloha 5. Nech $(G,\circ)$ je grupa. Je zobrazenie $g \mapsto g^{-1}$ izomorfizmus z G na G? Ak nie, vedeli by ste definovať binárnu operáciu $*$ na G, tak, aby toto zobrazenie bol izomorfizmus grúp $(G,\circ)$ a $(G,*)$? Je uvedené zobrazenie izomorfizmom, ak G je komutatívna?

Úloha 6. Nech $f\colon G \to H$ je homomorfizmus grúp. Dokážte:
a) Zobrazenie f je surjektívne práve vtedy, keď $\operatorname{Im} f = H$.
b) Zobrazenie g je injektívne práve vtedy, keď $\operatorname{Ker} f = \{e\}$.