Cvičenie 5

Relácie ekvivalencie

Úloha 1. Nech pre každé $i \in I$ je R_i relácie ekvivalencie na množine A. Ukážte, že potom aj $R = \bigcap_{i \in I} R_i$ je relácia ekvivalencie na množine A. Dá sa nejako vyjadriť $[a]_R$ pomocou $[a]_{R_i}$? (T.j. ak poznáme triedu prvku a v každej z relácií ekvivalencie R_i, $i \in I$, vieme nejako zistiť aká bude trieda tohoto prvku v relácie ekvivalencie R?)

Úloha 2. Ak R_1 a R_2 sú relácie ekvivalencie, je aj $R_1 \cup R_2$ relácia ekvivalencie?

Úloha 3. a) Nech $f\colon A \to B$ je surjektívne zobrazenie. Dokážte, že relácia R na množine A určená predpisom $aRa' \Leftrightarrow f(a) = f(a')$ je relácia ekvivalencie a triedy rozkladu sú množiny $f^{-1}(\{b\}) = f^{-1}(b)$ pre $b \in B$.
b) Nech R je relácia ekvivalencie na množine A a nech B je množina všetkých tried ekvivalencie. Dokážte, že zobrazenie $f\colon A \to B$, ktoré každému prvku priradí jeho triedu ekvivalencie (teda $f\colon a \mapsto [a]$) je surjektívne.
c) V predchádzajúcej časti sme každému surjektívnemu zobrazeniu priradili reláciu ekvivalencie a obrátene. Sú tieto dve priradenia sú navzájom inverzné?

Rozklad grupy podľa podgrupy

Úloha 4. Nájdite všetky ľavé (pravé) triedy grupy G podľa podgrupy H, ak
a) $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = \mathbb{Z}$;
b) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = 3x\}$;
c) $G = (\mathbb{Z}_6, \oplus)$, $H = 2\mathbb{Z}_3$;
d) $G = S_n$, $H = A_n$;
e) $G = S_3$, $H = [(12)]$;
f) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = 3\mathbb{Z}$.
(Pod „nájdite všetky triedy“ sa rozumie to, že pre každú triedu vyberieme jedného reprezentanta, v prípade, že ide o konečné množiny ich môžeme aj vypísať.)

Úloha 5. Pre podmnožinu A grupy G označíme $A^{-1} = \{a^{-1}; a \in A\}$. Dokážte
a) Pre ľubovoľnú podmnožinu $A \subseteq G$ platí $(A^{-1})^{-1} = A$.
b) Ak H je podgrupa grupy G, tak $H^{-1} = \{h^{-1}; h \in H\} = H$.
c) Pre ľubovoľné podmnožiny $A, B \subseteq G$ platí $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

Rád prvku

Úloha 6. Ak rád prvku a v grupe G je n a e je neutrálny prvok tejto grupy, tak pre prirodzené čísla $k \in \mathbb{N}$ platí $a^k = e$ práve vtedy, keď $n \mid k$. Ďalej pre každé $s \in \mathbb{N}$ existuje $m \in \mathbb{N}$ také, že $a^s = a^m$ a $0 \le m \le n - 1$.