Cvičenie 8 – okruhy

Úloha 1. Zistite (a svoje tvrdenie zdôvodnite) ktoré z uvedených vlastností sa z okruhu R prenesú na uvedené konštrukcie. (I je nejaký ideál v okruhu R a R/I označuje faktorový okruh. M je ľubovoľná neprázdna množina.)

	$R \times R$	R/I	R^M	podokruh	homomorfný obraz
pole					
obor integrity					
nemá delitele nuly					
má delitele nuly					
komutatívny okruh					
okruh s jednotkou					

Úloha 2. Ak R je obor integrity a $x^2 = 1$, tak $x = 1$ alebo $x = -1$.

Úloha 3. Dokážte, že $\{(r, r); r \in R\}$ je podokruh okruhu $R \times R$. Je tento podokruh izomorfný s okruhom R?

Úloha 4. Zistite, ktoré z nasledujúcich zobrazení sú homomorfizmy medzi okruhom A všetkých matíc typu 2×2 s celočíselnými koeficientami a okruhom $\mathbb{Z}$.

a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a$

b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a + d$ (*stopa* matice)

b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$ (determinant matice)

Úloha 5. Dokážte, že okruhy $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ a $(3\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nie sú izomorfné.

Úloha 6. Prienik ľubovoľného systému podokruhov je podokruh. Prienik ľubovoľného systému ideálov je ideál.

Úloha 7. Nech $X \neq \emptyset$ je ľubovoľná neprázdna množina. Dokážte, že potenčná množina $(P(X), \triangle, \cap)$ s operáciami $\triangle$ (symetrická diferencia množín) a $\cap$ (prienik množín) tvorí okruh. Nájdite izomorfizmus medzi týmto okruhom a okruhom $\mathbb{Z}_2^X$. (Poznámka: Bijekcia, ktorú nájdete v druhej časti, by sa dala použiť aj na dôkaz tvrdenia uvedeného v prvej časti.)

Úloha 8. Ukážte, že $f\colon \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mapsto a + bi$ je izomorfizmus medzi okruhmi $R = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}\}$ (s operáciami násobenia matíc a sčitovania matíc) a $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Zamyslite sa aj nad tým, či sú to naozaj okruhy.