

## Príklady na polynómy I

Prvok  $c \in F$  sa nazýva koreňom polynómu  $F[x]$ , ak  $f(c) = 0$  (po dosadení  $c$  do polynómu dostaneme 0.) Ak pracujeme s polynómami z  $F[x]$ , tak ako korene môžeme uvažovať aj prvky z nejakého nadpoľa  $F_1 \supseteq F$ . (Lebo  $F[x] \subseteq F_1[x]$  – ak sú všetky koeficienty z  $F$ , tak súčasne patria aj do nadpoľa  $F_1$ .)

Prvok  $c \in F$  je koreňom práve vtedy keď  $x - c \mid f(x)$ . Teda ak  $f(x)$  sa dá zapísať v tvare  $f(x) = g(x)(x - c)$ . Ak  $f(x) = g(x)(x - c)^2$  pre nejaký polynóm  $g(x) \in F[x]$ , tak hovoríme, že  $c$  je dvojnásobný koreň. Násobnosť koreňa je najvyššie také číslo, že  $f(x) = g(x)(x - c)^n$ .

**Úloha 1.** Dokážte, že zvyšok polynómu  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in F[x]$  po delení  $x - b$  je práve  $f(b)$  (=jeho hodnota v bode  $b \in F[x]$ ).

**Úloha 2.** Vydeľte dané polynómy so zvyškom v  $\mathbb{C}[x]$ .

- $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x + 2$ ,  $g(x) = x^2 + x - 2$
- $f(x) = x^5 + 2x^3 + 3x + 4$ ,  $g(x) = x^3 + x + 1$
- $f(x) = x^3 + (2 + 2i)x^2 + 3ix + 1$ ,  $g(x) = x^2 + (2 + i)x + i$

**Úloha 3.** Použitím Hornerovej schémy<sup>1</sup> zistite, či  $c$  je koreň polynómu  $f(x) \in \mathbb{C}[x]$  a vyjadrite tento polynóm v tvare  $f(x) = g(x)(x - c) + f(c)$ .

- $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x + 2$ ,  $c = -2$
- $f(x) = x^5 + 2x^3 + 3x + 4$ ,  $c = -1$
- $f(x) = x^3 + (2 + 2i)x^2 + 3ix + 1$ ,  $c = -i$

**Úloha 4.** Pomocou Hornerovej schémy vyjadriť:

- $f(x + 3)$  pre  $f(x) = x^4 - x^3 + 1$
- $(x - 2)^4 + 4(x - 2)^3 + 6(x - 2)^2 + 10(x - 2) + 20$

**Úloha 5.** Dokážte, že ak  $c = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  je koreň polynómu  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$  s celočíselnými koeficientami, tak  $p \mid a_0$  a  $q \mid a_n$ .

**Úloha 6.** Nájdite všetky racionálne korene daných polynómov (s pomocou Hornerovej schémy a tvrdenia dokázaného v predchádzajúcej úlohe). Aká je ich násobnosť?

- $f(x) = 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$
- $f(x) = 24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$
- $f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$

**Úloha 7.** Vypočítajte  $d(x) = \gcd(f(x), g(x))$  a vyjadrite ho v tvare  $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$ .

- $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$ ,  $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2$ ;
- $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$ ,  $g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$ ;
- $f(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 2x - 9$ ,  $g(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 7$ ;
- $f(x) = x^8 - 1$ ,  $g(x) = x^5 - 1$   
(Výsledky: a)  $u(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ ,  $v(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}$ ,  $d(x) = x + \frac{2}{3}$   
b)  $u(x) = -\frac{x-1}{3}$ ,  $v(x) = \frac{2x^2-2x-3}{3}$ ,  $d(x) = x - 1$   
c)  $d(x) = 1$ ,  $u(x) = 1/30(2x^2 + 5x - 1)$ ,  $v(x) = -1/30(2x^3 + 9x^2 + 7x + 3)$ )

<sup>1</sup>Pozri text k prednáške.