Zadania prémiových úloh

1. Nech $\circ$ je binárna operácia na G taká, že:
   a) $\circ$ je asociatívna
   b) $\circ$ má ľavý neutrálny prvok e, teda existuje $e \in G$ taký, že $e \circ a = a$ pre každé $a \in G$
   c) Každý prvok má ľavý inverzný prvok, t.j. ku každému $a \in G$ existuje $b \in G$ také, že $ba = e$ (kde e označuje ľavý neutrálny prvok).
   Dokážte, že $(G, \circ)$ je grupa. Ukážte na príklade, že množina s asociatívnou binárnou operáciou, ktorá má ľavý neutrálny a pravý inverzný prvok ešte nemusí byť grupa.

2. Ak $*$ je asociatívna binárna operácia na G, tak hovoríme, že $(G, *)$ je pologrupa. Dokážte, že konečná pologrupa, v ktorej platia zákony o krátení, je grupa. Platí to aj pre nekonečné pologrupy? (Dokážte alebo nájdite kontrapríklad.)

3. Nech G je grupa. Pre podmnožiny $A, B \subseteq G$ označíme $AB = \{ab; a \in A, b \in B\}$.
   a) Nech A a B sú podgrupy G. Dokážte, že AB je podgrupa G práve vtedy, keď $AB = BA$.
   b) Nájdite príklad grupy G a jej podgrúp A a B takých, že AB nie je podgrupa G.
   c) Ak A, B sú konečné podgrupy G, tak $|AB|.|A \cap B| = |A|.|B|$.
   d) Nech A, B, C sú podgrupy také, že $A \subseteq C \subseteq AB$. Dokážte $C = (AB) \cap (AC) = A(B \cap C)$.

4. Dokážte, že grupa A_4 párnych permutácií 4-prvkovej množiny nemá žiadnu 6-prvkovú podgrupu. (Kontrapríklad ukazujúci, že neplatí obrátenie Lagrangeovej vety.)

5. Nech G je grupa.
   a) Pre normálnu podgrupu H definujme reláciu R ako $aRb \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$. Dokážte, že táto relácia je kongruencia (definícia je v poznámkach k prednáške). Dokážte, že rozklad zodpovedajúci relácii R je práve rozklad G podľa podgrupy H.
   b) Dokážte, že ak R je kongruencia na G, tak $[e]_R$ je normálna podgrupa G. Navyše, rozklad určený reláciou ekvivalencie R je práve rozklad G podľa tejto podgrupy.
   c) Overte, že priradenia medzi normálnymi podgrupami G a kongruenciami na G z predchádzajúcich častí úlohy sú navzájom inverzné.

6. Nech G je grupa. Dva prvky x a y nazveme konjugované, ak existuje prvok $a \in G$ taký, že $y = axa^{-1}$. V tejto úlohe budeme označovať, že x a y sú konjugované, ako $x \sim y$.
   a) Dokážte, že relácia $\sim$ (relácia konjugovanosti) je relácia ekvivalencie na množine G. Triedy tejto relácie ekvivalencie budeme volať triedy konjugácie.

b) Dokážte, že podgrupa grupy G je normálna práve vtedy, keď je zjednotením niektorých tried konjugácie.
c) Tvoria prvky, pre ktoré je trieda konjugácie jednoprvková, podgrupu grupy G? Je to normálna podgrupa?

7. Budeme pracovať v grupe $(S_n, \circ)$ všetkých permutácií množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Hovoríme, že permutácie φ, ψ majú rovnaký cyklový typ, ak obe sa dajú zapísať ako súčin disjunktných cyklov tak, že v oboch rozkladoch sú dĺžky cyklov presne rovnaké. T.j. vieme ich zapísať oak $\varphi = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_k$ a $\psi = \sigma_1'\sigma_2' \dots \sigma_k'$, kde σ_i aj σ_i' sú cykly a majú rovnakú dĺžku. (Napríklad (12)(345) a (14)(235) majú rovnaký cyklový typ.)
   Dokážte, že $\varphi, \psi \in S_n$ majú rovnaký cyklový typ práve vtedy, ak existuje permutácia $\tau \in S_n$ taká, že $\tau\varphi\tau^{-1} = \psi$. (V terminológie z predošlej úlohy to vieme povedať tak, že φ a ψ sú kongujované v grupe S_n.)

8. a) Dokážte, že v okruhu $C(0,1)$ je každý ideál tvaru $M_p = \{f \in C(0,1); f(p) = 0\}$ pre $p \in \langle 0, 1\rangle$ maximálny.
   b) Dokážte, že všetky maximálne ideály v $C(0,1)$ majú takýto tvar.

9. Nech $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ a platí $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$; a, b, c, d sú navzájom rôzne celé čísla. Prečo neexistuje $k \in \mathbb{Z}$ také, že $f(k) = 8$?

10. Nech $(R, +, \cdot)$ je okruh s jednotkou. Ak existuje inverzný prvok vzhľadom na operáciu $\cdot$ k $1 - ab$, tak existuje aj inverzný prvok k $1 - ba$.