

# Zobrazenia

1. októbra 2012

# Množina

Množiny, s ktorými budeme pracovať:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$

Rovnosť množín: Množiny  $A$  a  $B$  sa rovnajú práve vtedy, keď

$$(x \in A) \quad \Leftrightarrow \quad (x \in B).$$

# Karteziánsky súčin

## Definícia

Ak  $A$ ,  $B$  sú množiny, tak ich *karteziánsky súčin* je množina všetkých usporiadaných dvojíc  $(a, b)$  takých, že  $a \in A$  a  $b \in B$ . Označujeme ho

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

# Definícia funkcie

Zobrazenie z množiny  $X$  do množiny  $Y$  = predpis, ktorý každému prvku množiny  $X$  priradí jediný prvok množiny  $Y$ . Formálne:

## Definícia

Zobrazenie  $f: X \rightarrow Y$  z množiny  $X$  do množiny  $Y$  je podmnožina  $f$  množiny  $X \times Y$  taká, že ku každému  $x \in X$  existuje práve jedno  $y \in Y$  s vlastnosťou  $(x, y) \in f$ .

Množinu  $X$  budeme tiež nazývať *definičný obor* zobrazenia  $f$  a množina  $Y$  je *obor hodnôt* zobrazenia  $f$ .

Namiesto zápisu  $(x, y) \in f$  budeme používať zápis  $y = f(x)$ .

# Príklady zobrazení

## Príklad

Uvedieme niekoľko príkladov zobrazení.

$$f_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_1(n) = 2n + 1$$

$$f_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_2(n) = 2n$$

$$f_3: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_3(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{ak } n \text{ je párne} \\ n - 1, & \text{ak } n \text{ je nepárne} \end{cases}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \sin x$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sin x$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^2$$

# Rovnosť zobrazení

## Definícia

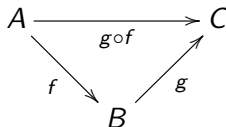
Hovoríme, že dve zobrazenia  $f: X \rightarrow Y$  a  $g: Z \rightarrow W$  sa *rovnajú*, ak  $X = Z$ ,  $Y = W$  a  $f(x) = g(x)$  pre každé  $x \in X$ . (Inými slovami, ak sa rovnajú ich definičné obory, obory hodnôt a obe zobrazenia nadobúdajú v každom bode rovnakú hodnotu.) Rovnosť zobrazení označujeme  $f = g$ .

# Skladanie zobrazení

## Definícia (Skladanie zobrazení)

Ak  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  sú zobrazenia, tak *zložením zobrazení  $f$  a  $g$*  nazývame zobrazenie  $g \circ f: X \rightarrow Z$  také, že pre každé  $x \in X$  platí

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$



## Skladanie zobrazení

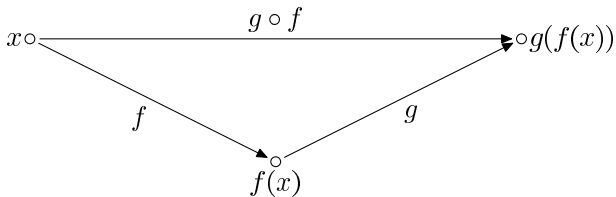


Figure: Skladanie zobrazení



# Asociatívnoš' skladania zobrazení

Tvrdenie (Asociatívnoš' skladania zobrazení)

Nech  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$ ,  $h: Z \rightarrow W$  sú zobrazenia, potom

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

# Injekcia, surjekcia, bijekcia

## Definícia

Nech  $f: X \rightarrow Y$  je zobrazenie. Hovoríme, že  $f$  je *injektívne (prosté) zobrazenie* (alebo tiež injekcia), ak pre všetky  $x, y \in X$  také, že  $x \neq y$  platí  $f(x) \neq f(y)$ .

Hovoríme, že  $f$  je *surjekcia (surjektívne zobrazenie, zobrazenie na)*, ak pre každé  $y \in Y$  existuje také,  $x \in X$ , že  $f(x) = y$ .

Hovoríme, že  $f$  je *bijekcia (bijektívne zobrazenie)*, ak  $f$  je súčasne injekcia aj surjekcia.

Ekvivalentná definícia injekcie:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

# Injekcia, surjekcia, bijekcia

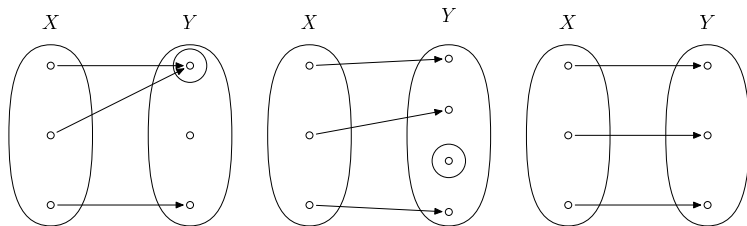


Figure: Ilustrácia injekcie, surjekcie a bijekcie

# Injekcia, surjekcia, bijekcia

## Tvrdenie

*Zloženie dvoch injekcií je injekcia, zloženie dvoch surjekcií je surjekcia, zloženie dvoch bijekcií je bijekcia.*

# Identita

## Definícia

Zobrazenie  $id_X: X \rightarrow X$  také, že  $id_X(x) = x$  pre každé  $x \in X$  sa nazýva *identické zobrazenie* (*identita*).

Pre  $f: X \rightarrow Y$  platí

$$f \circ id_X = f \quad \text{a} \quad id_Y \circ f = f.$$

# Inverzné zobrazenie

## Definícia

Nech  $f: X \rightarrow Y$  a  $g: Y \rightarrow X$  sú zobrazenia. Ak platí

$$g \circ f = id_X$$

$$f \circ g = id_Y$$

tak hovoríme, že zobrazenie  $g$  je *inverzné zobrazenie k  $f$* . Inverzné zobrazenie k zobrazeniu  $f$  označujeme  $f^{-1}$ .

$$g(f(x)) = x$$

$$f(g(y)) = y$$

# Vlastnosti inverzného zobrazenia

## Tvrdenie

*Inverzné zobrazenie k  $f$  existuje práve vtedy, keď  $f$  je bijekcia.*

## Tvrdenie

*Nech  $f: X \rightarrow Y$  a  $g: Y \rightarrow Z$  sú bijekcie. Potom*

$$(f^{-1})^{-1} = f$$
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

## Dôsledok

*Ak  $f$  je bijekcia, tak aj  $f^{-1}$  je bijekcia.*

# Permutácie

## Definícia

Ak  $M$  je konečná množina, tak bijekciu  $\varphi: M \rightarrow M$  budeme nazývať *permutáciou* množiny  $M$ .

$$M = \{1, 2, \dots, n\}$$

Zápis permutácií:

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{array} \right)$$



## Skladanie permutácií

Pre  $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , máme  $\varphi\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\tau\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{array}{l} \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \varphi = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \varphi\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$



Figure: Permutácie  $\tau$  a  $\varphi$

## Skladanie permutácií

$$\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{n\text{-krát}}$$

Pre  $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$  máme

$$\varphi^1 = \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi^2 = \varphi \circ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi^3 = \varphi \circ \varphi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$