Zobrazenia

1. októbra 2012

Množina

Množiny, s ktorými budeme pracovať: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
Rovnosť množín: Množiny A a B sa rovnajú práve vtedy, keď

$$(x \in A) \qquad \Leftrightarrow \qquad (x \in B).$$

Karteziánsky súčin

Definícia

Ak A, B sú množiny, tak ich *karteziánsky súčin* je množina všetkých usporiadaných dvojíc (a, b) takých, že $a \in A$ a $b \in B$. Označujeme ho

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

Definícia funkcie

Zobrazenie z množiny X do množiny Y = predpis, ktorý každému prvku množiny X priradí jediný prvok množiny Y. Formálne:

Definícia

Zobrazenie $f\colon X \to Y$ z množiny X do množiny Y je podmnožina f množiny $X \times Y$ taká, že ku každému $x \in X$ existuje práve jedno $y \in Y$ s vlastnosťou $(x, y) \in f$.
Množinu X budeme tiež nazývať *definičný obor* zobrazenia f a množina Y je *obor hodnôt* zobrazenia f.
Namiesto zápisu $(x, y) \in f$ budeme používať zápis $y = f(x)$.

Príklady zobrazení

Príklad

Uvedieme niekoľko príkladov zobrazení.

$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f_1(n) = 2n + 1$

$f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f_2(n) = 2n$

$$f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f_3(n) = \begin{cases} n+1, & \text{ak } n \text{ je párne} \\ n-1, & \text{ak } n \text{ je nepárne} \end{cases}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x.\sin x$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \sin x$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = x^2$

Rovnosť zobrazení

Definícia

Hovoríme, že dve zobrazenia $f\colon X \to Y$ a $g\colon Z \to W$ sa *rovnajú,* ak $X = Z$, $Y = W$ a $f(x) = g(x)$ pre každé $x \in X$. (Inými slovami, ak sa rovnajú ich definičné obory, obory hodnôt a obe zobrazenia nadobúdajú v každom bode rovnakú hodnotu.) Rovnosť zobrazení označujeme $f = g$.

Skladanie zobrazení

Definícia (Skladanie zobrazení)

Ak $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ sú zobrazenia, tak *zložením zobrazení f a g* nazývame zobrazenie $g \circ f\colon X \to Z$ také, že pre každé $x \in X$ platí

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g\circ f"'] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Skladanie zobrazení

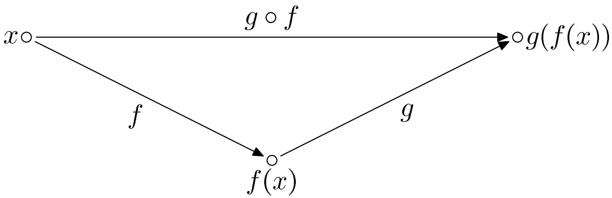

Figure: Skladanie zobrazení

Asociatívnosť skladania zobrazení

Tvrdenie (Asociatívnosť skladania zobrazení)

Nech $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ sú zobrazenia, potom

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$
$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

Injekcia, surjekcia, bijekcia

Definícia

Nech $f: X \to Y$ je zobrazenie. Hovoríme, že f je *injektívne* (*prosté*) *zobrazenie* (alebo tiež injekcia), ak pre všetky $x, y \in X$ také, že $x \neq y$ platí $f(x) \neq f(y)$.
Hovoríme, že f je *surjekcia* (*surjektívne zobrazenie, zobrazenie na*), ak pre každé $y \in Y$ existuje také, $x \in X$, že $f(x) = y$.
Hovoríme, že f je *bijekcia* (*bijektívne zobrazenie*), ak f je súčasne injekcia aj surjekcia.

Ekvivalentná definícia injekcie:

$$f(x) = f(y) \ \Rightarrow x = y.$$

Injekcia, surjekcia, bijekcia

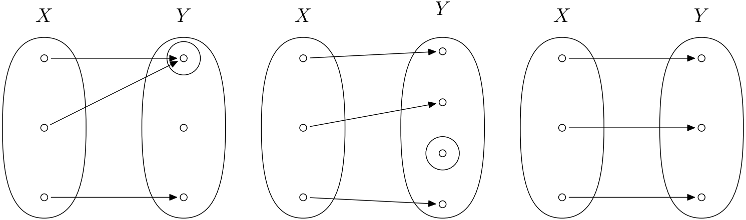

Figure: Ilustrácia injekcie, surjekcie a bijekcie

Injekcia, surjekcia, bijekcia

Tvrdenie

Zloženie dvoch injekcií je injekcia, zloženie dvoch surjekcií je surjekcia, zloženie dvoch bijekcií je bijekcia.

Identita

Definícia

Zobrazenie $id_X \colon X \to X$ také, že $id_X(x) = x$ pre každé $x \in X$ sa nazýva *identické zobrazenie* (*identita*).

Pre $f \colon X \to Y$ platí

$$f \circ id_X = f \qquad \text{a} \qquad id_Y \circ f = f\,.$$

Inverzné zobrazenie

Definícia

Nech $f: X \to Y$ a $g: Y \to X$ sú zobrazenia. Ak platí

$$g \circ f = id_X$$
$$f \circ g = id_Y$$

tak hovoríme, že zobrazenie g je *inverzné zobrazenie k* f. Inverzné zobrazenie k zobrazeniu f označujeme f^{-1}.

$$g(f(x)) = x$$
$$f(g(y)) = y$$

Vlastnosti inverzného zobrazenia

Tvrdenie

Inverzné zobrazenie k f existuje práve vtedy, keď f je bijekcia.

Tvrdenie

Nech $f: X \to Y$ a $g: Y \to Z$ sú bijekcie. Potom

$$(f^{-1})^{-1} = f$$
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Dôsledok

Ak f je bijekcia, tak aj f^{-1} je bijekcia.

Permutácie

Definícia

Ak M je konečná množina, tak bijekciu $\varphi\colon M \to M$ budeme nazývať *permutáciou* množiny M.

$M = \{1, 2, \ldots, n\}$
Zápis permutácií:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \ldots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

Skladanie permutácií

Pre $\varphi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, máme $\varphi\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\tau\varphi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

$$\begin{matrix} \tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\ \varphi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\ \varphi = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right) \end{matrix} \longrightarrow \varphi\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$$

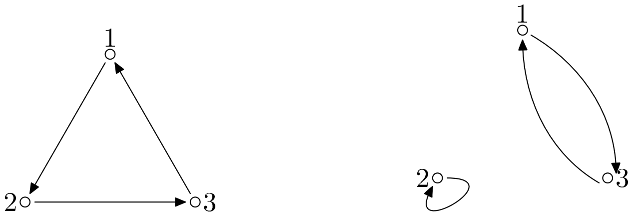

Figure: Permutácie τ a φ

Skladanie permutácií

$$\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n\text{-krát}}$$

Pre $\varphi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ máme

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= \varphi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{smallmatrix}\right) \\ \varphi^2 &= \varphi \circ \varphi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right) \\ \varphi^3 &= \varphi \circ \varphi^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}$$