Vektorové priestory

1. októbra 2012

Definícia vektorového priestoru

Definícia

Nech F je pole a $V \neq \emptyset$ je množina. Nech $+$ je binárna operácia na V a každej dvojici $c \in F$, $\vec{\alpha} \in V$ je priradený prvok $c.\vec{\alpha} \in V$, pričom platí pre ľubovoľné $c, d \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$:

(i) $(V, +)$ je komutatívna grupa,
(ii) $c.(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = c.\vec{\alpha} + c.\vec{\beta}$,
(iii) $(c + d).\vec{\alpha} = c.\vec{\alpha} + d.\vec{\alpha}$,
(iv) $(c.d).\vec{\alpha} = c.(d.\vec{\alpha})$,
(v) $1.\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$.

Potom hovoríme, že V je *vektorový priestor* nad poľom F.

Definícia vektorového priestoru

Prvky množiny V budeme nazývať *vektory* a spravidla ich budeme označovať gréckymi písmenami a šípkou. Pre prvky poľa F budeme niekedy používať termín *skaláry.*
Neutrálny prvok komutatívnej grupy $(V, +)$ budeme označovať $\vec{0}$ a nazývať *nulový vektor.*
Inverzný prvok v grupe $(V, +)$ budeme označovať $-\vec{\alpha}$ a nazývame *opačný vektor* k vektoru $\vec{\alpha}$. Vektor $\vec{\alpha} - \vec{\beta} := \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$ sa nazýva *rozdiel* vektorov $\vec{\alpha}$ a $\vec{\beta}$.

Operácie s vektormi v rovine

Vektory v rovine so sčitovaním a násobením ako ho poznáte zo strednej školy, tvoria vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

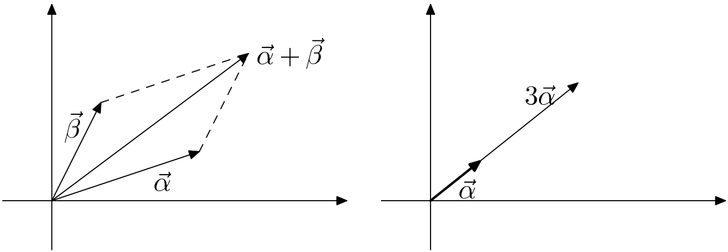

Figure: Operácie s vektormi v rovine

Priestor $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ = usporiadané n-tice reálnych čísel s operáciami $+$ a $\cdot$ definovanými po súradniciach tvoria vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2 \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 \ldots, x_n + y_n)$$
$$c(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (cx_1, cx_2 \ldots, cx_n)$$

Podobne môžeme definovať vektorový priestor F^n nad F.

Priestor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$V = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x),$$
$$(c.f)(x) := c.f(x),$$

Podobne: F^M pre ľubovoľné pole F a množinu M

Priestor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

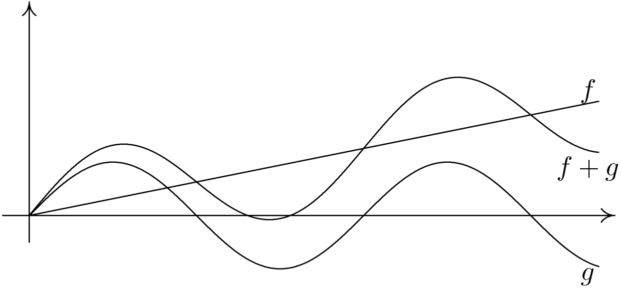

Figure: Sčitovanie v priestore $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Priestor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

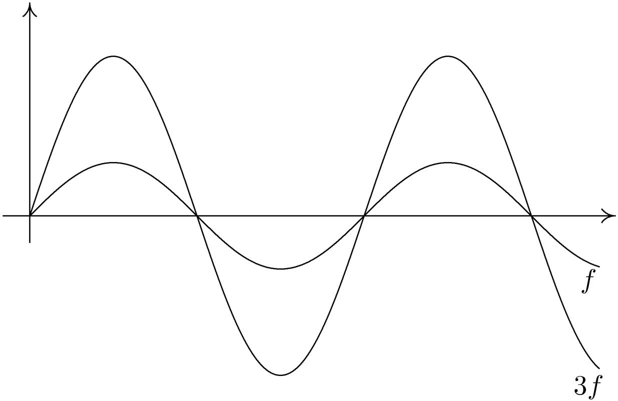

Figure: Násobenie skalárom v priestore $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Základné vlastnosti vektorového priestoru

Veta

Nech V je vektorový priestor nad poľom F, $c \in F$ a $\vec{\alpha} \in V$.

(a) $0.\vec{\alpha} = \vec{0}$,

(b) $c.\vec{0} = \vec{0}$,

(c) $c.\vec{\alpha} = \vec{0}$ *práve vtedy, keď* $c = 0$ *alebo* $\vec{\alpha} = \vec{0}$,

(d) $(-c).\vec{\alpha} = -c.\vec{\alpha}$.

Definícia vektorového podpriestoru

Definícia

Ak V je vektorový priestor nad poľom F, $S \neq \emptyset$ a $S \subseteq V$, tak S nazveme *podpriestorom* (alebo tiež *vektorovým podpriestorom*) priestoru V, ak

(i) pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S$ platí $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in S$,

(ii) pre ľubovoľné $\vec{\alpha} \in S$ a $c \in F$ platí $c.\vec{\alpha} \in S$.

Pre každý podpriestor platí $\vec{0} \in S$.

Príklady: priamka/rovina prechádzajúca cez 0; riešenie sústavy lineárnych rovníc s nulovou pravou stranou

$\{\vec{0}\}$ a V sú podpriestory priestoru V

Podpriestor je vektorový priestor

Ak V je vektorový priestor nad F a S je jeho podpriestor, tak S je opäť vektorový priestor.
Stačí si uvedomiť, že definície z podmienky zaručia, že $+$ a $\cdot$ sú operácie aj na S a že $\vec{0} \in S$. Takisto sa dá z definície overiť existencia inverzných prvkov v grupe $(V, +)$.
Vlastnosti tvaru podobného ako

$$(\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in S)(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}),$$

teda také, ktoré hovoria, že pre <u>všetky</u> prvky z S má platiť nejaká rovnosť, určite platia v podmnožine S ak platia v celej množine.

Kritérium vektorového podpriestoru

Tvrdenie (Kritérium vektorového podpriestoru)

Nech V je vektorový priestor nad poľom F a $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. Potom S je podpriestor V práve vtedy, keď pre ľubovoľné $c, d \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ platí

$$\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S \qquad \Rightarrow \qquad c\vec{\alpha} + d\vec{\beta} \in S. \tag{1}$$

Prienik podpriestorov je podpriestor

Veta

Ak S a T sú podpriestory vektorového priestoru V, tak aj $S \cap T$ je podpriestor V.

Dôsledok

Nech $n \in \mathbb{N}$. Ak $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sú podpriestory priestoru V, tak aj $\bigcap_{i=1}^{n} S_i$ je podpriestor priestoru V.

Veta

Nech $I \neq \emptyset$ je ľubovoľná neprázdna množina a S_i je podpriestor priestoru V pre každé $i \in I$. Potom aj $\bigcap_{i \in I} S_i$ je podpriestor priestoru V.

Prienik systému množín

Systém množín: A_i, $i \in I$ (predpokladáme $I \neq \emptyset$)

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x; (\forall i \in I) x \in A_i\}$$

$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\forall i \in I) x \in A_i$
Napríklad pre $I = \mathbb{N}$ a $A_i = \langle i, \infty)$ dostaneme

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$$

a pre $I = \mathbb{N}$ a $A_i = (-\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i+1})$

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{0\}$$

Lineárna kombinácia

Definícia

Nech V je vektorový priestor nad poľom F. Hovoríme, že vektor $\vec{\alpha}$ je *lineárnou kombináciou* vektorov $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$, ak existujú skaláry $c_1, c_2, \ldots, c_n \in F$ také, že

$$\vec{\alpha} = c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n.$$

Skaláry $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nazývame *koeficienty lineárnej kombinácie.*

Lineárny obal

Tvrdenie

Nech V je vektorový priestor nad poľom F. Ak $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$, tak množina

$$M = \{c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n;\, n \in \mathbb{N}, c_i \in F, \vec{\alpha}_i \in V \text{ pre } i = 1, 2 \dots, n\}$$

je podpriestor vektorového priestoru V.
Tento podpriestor nazývame lineárny obal vektorov $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ alebo podpriestor generovaný vektormi $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$. Označujeme ho

$$M =: [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n].$$

Ak platí $[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n] = V$, hovoríme, že vektory $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ generujú vektorový priestor V.

Lineárny obal

Príklady:
$\mathbb{R}^3 = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ a
$\mathbb{R}^n = [(1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)]$
Pre $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z=0\}$ platí
$S = [(1,0,-1),(0,1,-1)]$.

Lineárny obal

Lema

Ak $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n \in S$, kde S je podpriestor vektorového priestoru V nad poľom F, aj ich ľubovoľná lineárna kombinácia $c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n$ patrí do podpriestoru S.

Veta

Ak $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n \in S$, kde S je podpriestor vektorového priestoru V nad poľom F, tak $[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n] \subseteq S$.

Podpriestor $[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n]$ je najmenší podpriestor priestoru V, ktorý obsahuje vektory $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$.

Lineárny obal a lineárna kombinácia

Veta

Nech $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n \in V$, $\vec{\beta} \in V$, kde V je vektorový priestor nad poľom F. Potom $\vec{\beta}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$ práve vtedy, keď

$$[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n] = [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}].$$

Lineárna nezávislosť

Definícia

Nech V je vektorový priestor nad poľom F. Vektory $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ sú *lineárne závislé,* ak existujú $c_1, \ldots, c_n \in F$, ktoré nie sú všetky nulové a platí

$$c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n = \vec{0}.$$

(Stručne: $\vec{0}$ je nenulovou lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$.)
V opačnom prípade hovoríme, že vektory $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ *lineárne nezávislé.*

Ekvivalentná definícia:

$$c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0.$$

Lineárna nezávislosť

Negovanie výrokov z kvantifikátormi:

$$\neg[(\forall x)P(x)] \quad\Leftrightarrow\quad (\exists x)(\neg P(x)),$$
$$\neg[(\exists x)P(x)] \quad\Leftrightarrow\quad (\forall x)(\neg P(x)).$$

Lineárna závislosť:

$$(\exists c_1,\dots,c_n \in F)[c_1\vec{\alpha}_1+\dots+c_n\vec{\alpha}_n = 0 \wedge (c_1 \neq 0 \vee c_2 \neq 0 \vee \dots \vee c_n \neq 0)]$$

Lineárna nezávislosť:

$$(\forall c_1,\dots,c_n \in F)[c_1\vec{\alpha}_1+\dots+c_n\vec{\alpha}_n \neq 0 \vee (c_1 = 0 \wedge c_2 = 0 \wedge \dots \wedge c_n = 0)]$$

$$(\forall c_1,\dots,c_n \in F)(c_1\vec{\alpha}_1+\dots+c_n\vec{\alpha}_n = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0)$$

Využili sme $(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$.

Lineárna nezávislosť

Príklad

Jeden vektor $\vec{\alpha}$ tvorí lineárne závislú množinu práve vtedy, keď $\vec{\alpha} = \vec{0}$.
Dva vektory $\vec{\alpha}$ a $\vec{\beta}$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď jeden z nich je násobkom druhého
Vektory $(0,1),(1,0),(1,1) \in \mathbb{R}^2$ sú lineárne závislé, lebo $1.(0,1) + 1.(0,1) - 1.(1,1) = (0,0)$.

Lineárna nezávislosť a lineárna kombinácia

Veta

Nech V je vektorový priestor nad poľom F. Nech n je prirodzené číslo, $n \geq 2$ a $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n \in V$. Vektory $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď niektorý z nich je lineárnou kombináciou ostatných.

Veta

Nech V je vektorový priestor nad poľom F. Nech $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n \in V$ sú vektory také, že $\vec{\alpha}_1 \neq \vec{0}$. Vektory $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď niektorý z nich je lineárnou kombináciou predchádzajúcich.

Steinitzova veta o výmene

Veta (Steinitzova veta o výmene)

Nech V je vektorový priestor nad poľom F. Ak $V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$ (vektorový priestor V je generovaný vektormi $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$) a $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_s \in V$ sú lineárne nezávislé vektory, tak

(i) $s \leq n$,

(ii) *z vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sa dá vybrať $n - s$ vektorov, ktoré spolu s vektormi $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_s$ generujú V.*

Steinitzova veta o výmene

Príklad

$\vec{\alpha}_1 = (1,0,0)$, $\vec{\alpha}_2 = (0,1,0)$ a $\vec{\alpha}_3 = (0,0,1)$
$\vec{\beta}_1 = (1,1,0)$ a $\vec{\beta}_2 = (1,0,1)$
$\mathbb{R}^3 = [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3] = [\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\alpha}_1] = [\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\alpha}_2] = [\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\alpha}_3]$

Príklad

$\vec{\alpha}_1 = (1,0,0)$, $\vec{\alpha}_2 = (0,1,0)$ a $\vec{\alpha}_3 = (0,0,1)$
$\vec{\beta}_1 = (1,1,0)$ a $\vec{\beta}_2 = (0,1,0)$
$\mathbb{R}^3 = [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3] = [\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\alpha}_3]$ ale $[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\alpha}_1] = [\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\alpha}_2] \subsetneq \mathbb{R}^3$

Báza vektorového priestoru

Definícia

Nech V je vektorový priestor. Hovoríme, že V je *konečnorozmerný* ak existuje taká konečná množina vektorov $\{\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n\}$, že platí $[\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n] = V$.

Definícia

Nech V je vektorový priestor nad poľom F. Množinu vektorov $\{\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n\}$ nazývame *bázou* priestoru V, ak

(i) vektory $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé,

(ii) $V = [\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n]$.

(Stručne: Báza je taká množina <u>lineárne nezávislých</u> vektorov, ktorá<u>generuje</u> celý priestor.)

Báza vektorového priestoru

Priestor $V = \{\vec{0}\}$ nemá bázu.

Príklad

Priestor F^n má bázu

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ \vec{\varepsilon}_2 &= (0, 1, \dots, 0), \\ &\dots \\ \vec{\varepsilon}_n &= (0, \dots, 0, 1). \end{aligned}$$

Túto bázu nazývame *štandardná báza F^n.*

Báza vektorového priestoru

Veta

Ľubovoľné dve bázy konečnorozmerného vektorového priestoru V majú rovnaký počet prvkov.

Veta

Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor. Ak $\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_s \in V$ sú lineárne nezávislé, tak sa dajú doplniť na bázu priestoru V.

Dôsledok

Každý konečnorozmerný vektorový priestor $V \neq \{\vec{0}\}$ má bázu.

Dimenzia vektorového priestoru

Definícia

Dimenziou konečnorozmerného vektorového priestoru V nazývame počet prvkov ľubovoľnej jeho bázy. (Pre nulový priestor dodefinujeme $d(\{\vec{0}\}) = 0$.) Toto číslo označujeme $d(V)$.

$d(F^n) = n$

Dôsledok

Ak V je konečnorozmený vektorový priestor a $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé vo V, tak $n \leq d(V)$.

Ekvivalentné podmienky pre bázu

Veta

Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor a $d(V) = n$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) $\{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n\}$ *je báza priestoru* V,

(ii) *vektory* $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ *sú lineárne nezávislé,*

(iii) $V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$.

Veta

Nech V je vektorový priestor. Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ tvoria bázu priestoru V práve vtedy, keď každý vektor $\vec{\beta}$ sa dá jednoznačne vyjadriť ako

$$\vec{\beta} = c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n.$$

Konečnorozmerné a nekonečnorozmerné priestory

Veta

Ľubovoľný podpriestor S konečnorozmerného priestoru V je konečnorozmerný. Navyše, $d(S) \leq d(V)$.

Tvrdenie

Ak S je podpriestor konečnorozmerného vektorového priestoru V a $d(S) = d(V)$, tak $S = V$.

Príklad

Vektorový priestor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ všetkých zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ nie je konečnorozmerný.

Motivácia

Už vieme, že prienik podpriestorov vektorového priestoru je tiež podpriestor. Ako je to so zjednotením?
Pre $S = [(1,0,0)]$ a $T = [(0,1,0)]$ v R^3, $S \cup T$ nie je podpriestor.
$(1,0,0), (0,1,0) \in S \cup T$ ale $(1,0,0) + (0,1,0) = (1,1,0) \notin S \cup T$.

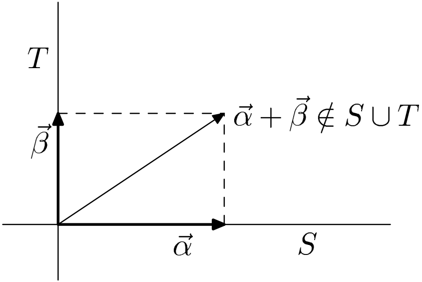

Figure: Zjednotenie 2 podpriestorov nemusí byť podpriestor

Motivácia

Ako vyzerá najmenší podpriestor, ktorý obsahuje S aj T?
Pre $S = [(1,0,0)]$ a $T = [(0,1,0)]$ je to $[(1,0,0),(0,1,0)]$.

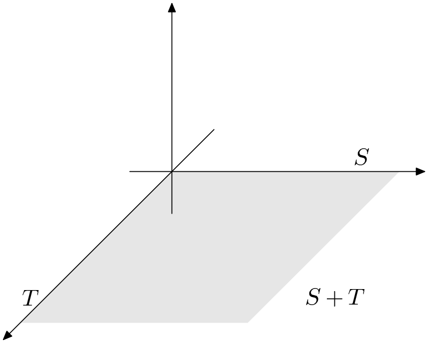

Figure: Najmenší podpriestor obsahujúci S aj T

Definícia lineárneho súčtu

Veta

Nech S, T sú vektorové podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F. Potom

$$S + T = \{\vec{\alpha} + \vec{\beta}; \vec{\alpha} \in S, \vec{\beta} \in T\}$$

je podpriestorom vektorového priestoru V.

Definícia

Ak S, T sú podpriestory vektorového podpriestoru V, tak vektorový podpriestor $S + T$ sa nazýva *lineárny súčet* podpriestorov S a T.

Dimenzia lineárneho súčtu

Veta

Nech S a T sú podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F. Nech $S = [\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n]$, $T = [\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_m]$. Potom $S + T = [\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_m]$.

Veta

Nech S, T sú podpriestory konečnorozmerného priestoru V. Potom

$$d(S) + d(T) = d(S + T) + d(S \cap T).$$

Podobá sa na vzorec: $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$

Direktný súčet

Definícia

Nech S, T sú podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F a nech $S \cap T = \{\vec{0}\}$. Potom podpriestor $S + T$ nazývame *direktný* (*priamy*) *súčet* podpriestorov S a T a označujeme ho $S \oplus T$.

Direktný súčet

Veta

Nech S, T, P sú podpriestory konečnorozmerného vektorového priestoru V nad poľom F. Tieto podmienky sú potom ekvivalentné:

(i) $P = S \oplus T$

(ii) $P = S + T$ *a* $d(P) = d(S) + d(T)$

(iii) *Ak* $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ *je báza podpriestoru* S *a* $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m$ *je báza podpriestoru* T, *tak* $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m$ *je báza podpriestoru* P.

(iv) $P = S + T$ *a každý vektor* $\vec{\gamma} \in P$ *sa dá jediným spôsobom vyjadriť v tvare* $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, *kde* $\vec{\alpha} \in S$ *a* $\vec{\beta} \in T$. (*T.j. ak* $\vec{\gamma} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\beta}_1 = \vec{\alpha}_2 + \vec{\beta}_2$, *pričom* $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2 \in S$ *a* $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2 \in T$, *tak* $\vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}_2$ *a* $\vec{\beta}_1 = \vec{\beta}_2$.)