

Vektorové priestory

1. októbra 2012



Definícia vektorového priestoru

Definícia

Nech F je pole a $V \neq \emptyset$ je množina. Nech $+$ je binárna operácia na V a každej dvojici $c \in F$, $\vec{\alpha} \in V$ je priradený prvok $c \cdot \vec{\alpha} \in V$, pričom platí pre ľubovoľné $c, d \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$:

- (i) $(V, +)$ je komutatívna grupa,
- (ii) $c \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = c \cdot \vec{\alpha} + c \cdot \vec{\beta}$,
- (iii) $(c + d) \cdot \vec{\alpha} = c \cdot \vec{\alpha} + d \cdot \vec{\alpha}$,
- (iv) $(c \cdot d) \cdot \vec{\alpha} = c \cdot (d \cdot \vec{\alpha})$,
- (v) $1 \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$.

Potom hovoríme, že V je *vektorový priestor* nad poľom F .



Definícia vektorového priestoru

Prvky množiny V budeme nazývať *vektory* a spravidla ich budeme označovať gréckymi písmenami a šípkou. Pre prvky poľa F budeme niekedy používať termín *skaláry*.

Neutrálny prvok komutatívnej grupy $(V, +)$ budeme označovať $\vec{0}$ a nazývať *nulový vektor*.

Inverzný prvok v grupe $(V, +)$ budeme označovať $-\vec{\alpha}$ a nazývame *opačný vektor* k vektoru $\vec{\alpha}$. Vektor $\vec{\alpha} - \vec{\beta} := \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$ sa nazýva *rozdiel* vektorov $\vec{\alpha}$ a $\vec{\beta}$.

Operácie s vektormi v rovine

Vektory v rovine so sčítaním a násobením ako ho poznáte zo strednej školy, tvoria vektorový priestor nad poľom \mathbb{R} .

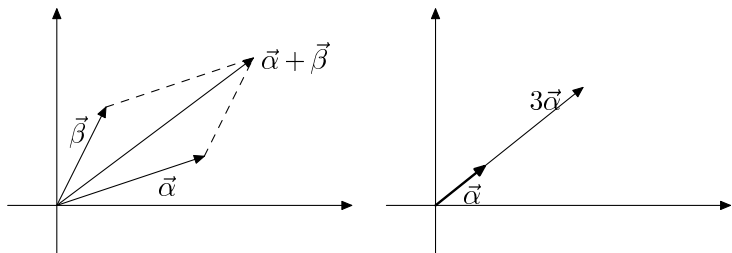


Figure: Operácie s vektormi v rovine



Priestor \mathbb{R}^n

\mathbb{R}^n = usporiadané n -tice reálnych čísel s operáciami $+$ a \cdot definovanými po súradniciach tvoria vektorový priestor nad \mathbb{R} .

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$c(x_1, x_2, \dots, x_n) = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n)$$

Podobne môžeme definovať vektorový priestor F^n nad F .



Priestor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$$V = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x),$$

$$(c \cdot f)(x) := c \cdot f(x),$$

Podobne: F^M pre ľubovoľné pole F a množinu M

Priestor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

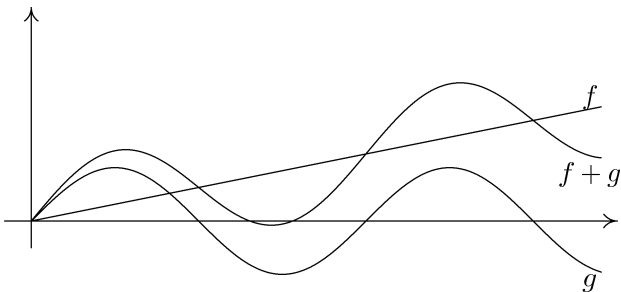


Figure: Sčítovanie v priestore $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$



Priestor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

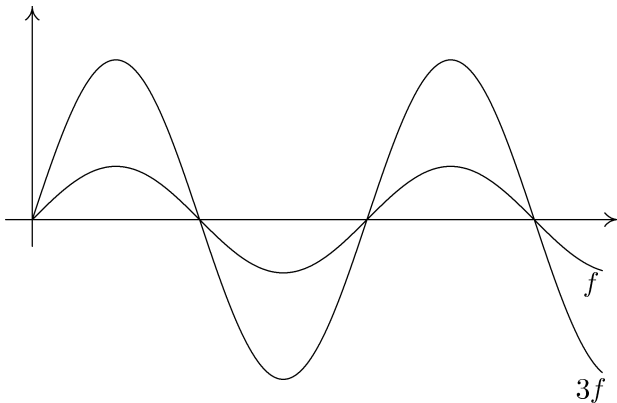


Figure: Násobenie skalárom v priestore $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Základné vlastnosti vektorového priestoru

Veta

Nech V je vektorový priestor nad poľom F , $c \in F$ a $\vec{\alpha} \in V$.

(a) $0 \cdot \vec{\alpha} = \vec{0}$,

(b) $c \cdot \vec{0} = \vec{0}$,

(c) $c \cdot \vec{\alpha} = \vec{0}$ práve vtedy, keď $c = 0$ alebo $\vec{\alpha} = \vec{0}$,

(d) $(-c) \cdot \vec{\alpha} = -c \cdot \vec{\alpha}$.



Definícia vektorového podpriestoru

Definícia

Ak V je vektorový priestor nad poľom F , $S \neq \emptyset$ a $S \subseteq V$, tak S nazveme *podpriestorom* (alebo tiež *vektorovým podpriestorom*) priestoru V , ak

- (i) pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S$ platí $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in S$,
- (ii) pre ľubovoľné $\vec{\alpha} \in S$ a $c \in F$ platí $c \cdot \vec{\alpha} \in S$.

Pre každý podpriestor platí $\vec{0} \in S$.

Príklady: priamka/rovina prechádzajúca cez 0 ; riešenie sústavy lineárnych rovníc s nulovou pravou stranou $\{\vec{0}\}$ a V sú podpriestory priestoru V



Podpriestor je vektorový priestor

Ak V je vektorový priestor nad F a S je jeho podpriestor, tak S je opäť vektorový priestor.

Stačí si uvedomiť, že definície z podmienky zaručia, že $+$ a \cdot sú operácie aj na S a že $\vec{0} \in S$. Takisto sa dá z definície overiť existencia inverzných prvkov v grupe $(V, +)$.

Vlastnosti tvaru podobného ako

$$(\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in S)(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}),$$

teda také, ktoré hovoria, že pre všetky prvky z S má platiť nejaká rovnosť, určite platia v podmnožine S ak platia v celej množine.

Kritérium vektorového podpriestoru

Tvrdenie (Kritérium vektorového podpriestoru)

Nech V je vektorový priestor nad poľom F a $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. Potom S je podpriestor V práve vtedy, keď pre ľubovoľné $c, d \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S$ platí

$$\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S \quad \Rightarrow \quad c\vec{\alpha} + d\vec{\beta} \in S. \quad (1)$$



Prienik podpriestorov je podpriestor

Veta

Ak S a T sú podpriestory vektorového priestoru V , tak aj $S \cap T$ je podpriestor V .

Dôsledok

Nech $n \in \mathbb{N}$. Ak S_1, S_2, \dots, S_n sú podpriestory priestoru V , tak aj $\bigcap_{i=1}^n S_i$ je podpriestor priestoru V .

Veta

Nech $I \neq \emptyset$ je ľubovoľná neprázdna množina a S_i je podpriestor priestoru V pre každé $i \in I$. Potom aj $\bigcap_{i \in I} S_i$ je podpriestor priestoru V .

Priemik systému množín

Systém množín: $A_i, i \in I$ (predpokladáme $I \neq \emptyset$)

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x; (\forall i \in I) x \in A_i\}$$

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\forall i \in I) x \in A_i$$

Napríklad pre $I = \mathbb{N}$ a $A_i = \langle i, \infty \rangle$ dostaneme

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$$

a pre $I = \mathbb{N}$ a $A_i = (-\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i+1})$

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{0\}$$



Lineárna kombinácia

Definícia

Nech V je vektorový priestor nad poľom F . Hovoríme, že vektor $\vec{\alpha}$ je *lineárnou kombináciou* vektorov $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$, ak existujú skaláry $c_1, c_2, \dots, c_n \in F$ také, že

$$\vec{\alpha} = c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n.$$

Skaláry c_1, c_2, \dots, c_n nazývame *koefficienty lineárnej kombinácie*.



Lineárny obal

Tvrdenie

Nech V je vektorový priestor nad poľom F . Ak $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$, tak množina

$$M = \{c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n; n \in \mathbb{N}, c_i \in F, \vec{\alpha}_i \in V \text{ pre } i = 1, 2, \dots, n\}$$

je podpriestor vektorového priestoru V .

Tento podpriestor nazývame lineárny obal vektorov $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ alebo podpriestor generovaný vektormi $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$. Označujeme ho

$$M =: [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n].$$

Ak platí $[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n] = V$, hovoríme, že vektory $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ generujú vektorový priestor V .



Lineárny obal

Príklady:

$$\mathbb{R}^3 = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)] \text{ a}$$

$$\mathbb{R}^n = [(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)]$$

Pre $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ platí

$$S = [(1, 0, -1), (0, 1, -1)].$$

Lineárny obal

Lema

Ak $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n \in S$, kde S je podpriestor vektorového priestoru V nad poľom F , aj ich ľubovoľná lineárna kombinácia $c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n$ patrí do podpriestoru S .

Veta

Ak $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n \in S$, kde S je podpriestor vektorového priestoru V nad poľom F , tak $[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n] \subseteq S$.

Podpriestor $[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n]$ je najmenší podpriestor priestoru V , ktorý obsahuje vektory $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$.



Lineárny obal a lineárna kombinácia

Veta

Nech $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$, $\vec{\beta} \in V$, kde V je vektorový priestor nad poľom F . Potom $\vec{\beta}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ práve vtedy, keď

$$[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n] = [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}].$$

Lineárna nezávislosť

Definícia

Nech V je vektorový priestor nad poľom F . Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú *lineárne závislé*, ak existujú $c_1, \dots, c_n \in F$, ktoré nie sú všetky nulové a platí

$$c_1 \vec{\alpha}_1 + \dots + c_n \vec{\alpha}_n = \vec{0}.$$

(Stručne: $\vec{0}$ je nenulovou lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$.)

V opačnom prípade hovoríme, že vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ *lineárne nezávislé*.

Ekvivalentná definícia:

$$c_1 \vec{\alpha}_1 + c_2 \vec{\alpha}_2 + \dots + c_n \vec{\alpha}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$



Lineárna nezávislosť

Negovanie výrokov z kvantifikátormi:

$$\neg[(\forall x)P(x)] \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x)(\neg P(x)),$$

$$\neg[(\exists x)P(x)] \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)(\neg P(x)).$$

Lineárna závislosť:

$$(\exists c_1, \dots, c_n \in F)[c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n = 0 \wedge (c_1 \neq 0 \vee c_2 \neq 0 \vee \dots \vee c_n \neq 0)]$$

Lineárna nezávislosť:

$$(\forall c_1, \dots, c_n \in F)[c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n \neq 0 \vee (c_1 = 0 \wedge c_2 = 0 \wedge \dots \wedge c_n = 0)]$$

$$(\forall c_1, \dots, c_n \in F)(c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0)$$

Využili sme $(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$.

Lineárna nezávislosť

Príklad

Jeden vektor $\vec{\alpha}$ tvorí lineárne závislú množinu práve vtedy, keď $\vec{\alpha} = \vec{0}$.

Dva vektory $\vec{\alpha}$ a $\vec{\beta}$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď jeden z nich je násobkom druhého

Vektory $(0, 1), (1, 0), (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ sú lineárne závislé, lebo $1 \cdot (0, 1) + 1 \cdot (0, 1) - 1 \cdot (1, 1) = (0, 0)$.

Lineárna nezávislosť a lineárna kombinácia

Veta

Nech V je vektorový priestor nad poľom F . Nech n je prirodzené číslo, $n \geq 2$ a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$. Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď niektorý z nich je lineárnou kombináciou ostatných.

Veta

Nech V je vektorový priestor nad poľom F . Nech $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$ sú vektory také, že $\vec{\alpha}_1 \neq \vec{0}$. Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď niektorý z nich je lineárnou kombináciou predchádzajúcich.

Steinitzova veta o výmene

Veta (Steinitzova veta o výmene)

Nech V je vektorový priestor nad poľom F . Ak $V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$ (vektorový priestor V je generovaný vektormi $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$) a $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_s \in V$ sú lineárne nezávislé vektory, tak

- (i) $s \leq n$,
- (ii) z vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sa dá vybrať $n - s$ vektorov, ktoré spolu s vektormi $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_s$ generujú V .

Steinitzova veta o výmene

Príklad

$$\vec{\alpha}_1 = (1, 0, 0), \vec{\alpha}_2 = (0, 1, 0) \text{ a } \vec{\alpha}_3 = (0, 0, 1)$$

$$\vec{\beta}_1 = (1, 1, 0) \text{ a } \vec{\beta}_2 = (1, 0, 1)$$

$$\mathbb{R}^3 = [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3] = [\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\alpha}_1] = [\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\alpha}_2] = [\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\alpha}_3]$$

Príklad

$$\vec{\alpha}_1 = (1, 0, 0), \vec{\alpha}_2 = (0, 1, 0) \text{ a } \vec{\alpha}_3 = (0, 0, 1)$$

$$\vec{\beta}_1 = (1, 1, 0) \text{ a } \vec{\beta}_2 = (0, 1, 0)$$

$$\mathbb{R}^3 = [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3] = [\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\alpha}_3] \text{ ale } [\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\alpha}_1] = [\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\alpha}_2] \subsetneq \mathbb{R}^3$$

Báza vektorového priestoru

Definícia

Nech V je vektorový priestor. Hovoríme, že V je *konečnorozmerný* ak existuje taká konečná množina vektorov $\{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n\}$, že platí $[\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n] = V$.

Definícia

Nech V je vektorový priestor nad poľom F . Množinu vektorov $\{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n\}$ nazývame *bázou* priestoru V , ak

- (i) vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé,
- (ii) $V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$.

(Stručne: Báza je taká množina lineárne nezávislých vektorov, ktorá generuje celý priestor.)



Báza vektorového priestoru

Priestor $V = \{\vec{0}\}$ nemá bázu.

Príklad

Priestor F^n má bázu

$$\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$\vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

...

$$\vec{\varepsilon}_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Túto bázu nazývame *standardná báza* F^n .



Báza vektorového priestoru

Veta

Ľubovoľné dve bázy konečnorozmerného vektorového priestoru V majú rovnaký počet prvkov.

Veta

Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor. Ak $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_s \in V$ sú lineárne nezávislé, tak sa dajú doplniť na bázu priestoru V .

Dôsledok

Každý konečnorozmerný vektorový priestor $V \neq \{\vec{0}\}$ má bázu.

Dimenzia vektorového priestoru

Definícia

Dimenziou konečnorozmerného vektorového priestoru V nazývame počet prvkov ľubovoľnej jeho bázy. (Pre nulový priestor dodefinujeme $d(\{\vec{0}\}) = 0$.) Toto číslo označujeme $d(V)$.

$$d(F^n) = n$$

Dôsledok

Ak V je konečnorozmerný vektorový priestor a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé vo V , tak $n \leq d(V)$.

Ekvivalentné podmienky pre bázu

Veta

Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor a $d(V) = n$.

Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) $\{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n\}$ je báza priestoru V ,
- (ii) vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé,
- (iii) $V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$.

Veta

Nech V je vektorový priestor. Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ tvoria bázu priestoru V práve vtedy, keď každý vektor $\vec{\beta}$ sa dá jednoznačne vyjadriť ako

$$\vec{\beta} = c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n.$$

Konečnorozmerné a nekonečnorozmerné priestory

Veta

Ľubovoľný podpriestor S konečnorozmerného priestoru V je konečnorozmerný. Navyše, $d(S) \leq d(V)$.

Tvrdenie

Ak S je podpriestor konečnorozmerného vektorového priestoru V a $d(S) = d(V)$, tak $S = V$.

Príklad

Vektorový priestor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ všetkých zobrazení z \mathbb{R} do \mathbb{R} nie je konečnorozmerný.



Motivácia

Už vieme, že prienik podpriestorov vektorového priestoru je tiež podpriestor. Ako je to so zjednotením?

Pre $S = [(1, 0, 0)]$ a $T = [(0, 1, 0)]$ v R^3 , $S \cup T$ nie je podpriestor.
 $(1, 0, 0), (0, 1, 0) \in S \cup T$ ale $(1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0) \notin S \cup T$.

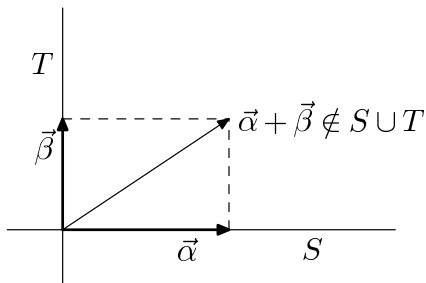


Figure: Zjednotenie 2 podpriestorov nemusí byť podpriestor

Definícia lineárneho súčtu

Veta

Nech S, T sú vektorové podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F . Potom

$$S + T = \{\vec{\alpha} + \vec{\beta}; \vec{\alpha} \in S, \vec{\beta} \in T\}$$

je podpriestorom vektorového priestoru V .

Definícia

Ak S, T sú podpriestory vektorového podpriestoru V , tak vektorový podpriestor $S + T$ sa nazýva *lineárny súčet* podpriestorov S a T .



Dimenzia lineárneho súčtu

Veta

Nech S a T sú podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F .

Nech $S = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$, $T = [\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m]$. Potom

$S + T = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m]$.

Veta

Nech S , T sú podpriestory konečnorozmerného priestoru V . Potom

$$d(S) + d(T) = d(S + T) + d(S \cap T).$$

Podobá sa na vzorec: $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$



Direktný súčet

Definícia

Nech S, T sú podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F a nech $S \cap T = \{\vec{0}\}$. Potom podpriestor $S + T$ nazývame *direktný (priamy) súčet* podpriestorov S a T a označujeme ho $S \oplus T$.

Direktný súčet

Veta

Nech S, T, P sú podpriestory konečnorozmerného vektorového priestoru V nad poľom F . Tieto podmienky sú potom ekvivalentné:

- (i) $P = S \oplus T$
- (ii) $P = S + T$ a $d(P) = d(S) + d(T)$
- (iii) Ak $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza podpriestoru S a $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m$ je báza podpriestoru T , tak $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m$ je báza podpriestoru P .
- (iv) $P = S + T$ a každý vektor $\vec{\gamma} \in P$ sa dá jediným spôsobom vyjadriť v tvare $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, kde $\vec{\alpha} \in S$ a $\vec{\beta} \in T$. (T.j. ak $\vec{\gamma} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\beta}_1 = \vec{\alpha}_2 + \vec{\beta}_2$, pričom $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2 \in S$ a $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2 \in T$, tak $\vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}_2$ a $\vec{\beta}_1 = \vec{\beta}_2$.)