Lineárne zobrazenia a matice

19. novembra 2012

Sústavy lineárnych rovníc

Definícia

Sústavou lineárnych rovníc rozumieme systém rovníc tvaru

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= c_2 \\
&\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= c_m
\end{aligned}
\tag{1}
$$

kde $a_{ij}, c_i \in F$ pre všetky prípustné hodnoty indexov i a j.
Riešenie sústavy lineárnych rovníc je n-tica $(x_1, \ldots, x_n)$ ktorá spĺňa všetky uvedené rovnice. Ak existuje aspoň jedno riešenie sústavy lineárnych rovníc, hovoríme, že táto sústava je *riešiteľná.* Skaláry $c_1, \ldots, c_n$ nazývame *pravé strany,* a_{ij} sú *koeficienty* a x_i sú neznáme.

Matica sústavy

Definícia

Maticu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazývame *matica sústavy* (1).

Maticu

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

nazývame *rozšírená matica sústavy* (1).

Maticový zápis sústavy

$$A\vec{x}^T = \vec{c}^T$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Sústavy a riadkové úpravy

Veta

Ak rozšírené matice dvoch sústav lineárnych rovníc sú riadkovo ekvivalentné, tak tieto dve sústavy majú rovnakú množinu riešení.

Homogénne sústavy lineárnych rovníc

homogénna sústava = pravé strany sú nulové

Veta

Množina všetkých riešení homogénnej sústavy lineárnych rovníc tvorí podpriestor priestoru F^n.

Homogénne sústavy lineárnych rovníc

$$
\begin{aligned}
x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + c_{1,r+2}x_{r+2} + \dots + c_{1,n}x_n &= 0\\
x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + c_{2,r+2}x_{r+2} + \dots + c_{2,n}x_n &= 0\\
&\dots\\
x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + c_{r,r+2}x_{r+2} + \dots + c_{r,n}x_n &= 0
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\gamma}_{r+1} &= (-c_{1,r+1}, -c_{2,r+1}, \dots, -c_{r,r+1}, 1, 0, \dots, 0),\\
\vec{\gamma}_{r+2} &= (-c_{1,r+2}, -c_{2,r+2}, \dots, -c_{r,r+2}, 0, 1, \dots, 0),\\
&\dots\\
\vec{\gamma}_n &= (-c_{1,n}, -c_{2,n}, \dots, -c_{r,n}, 0, \dots, 0, 1).
\end{aligned} \tag{3}
$$

Homogénne sústavy lineárnych rovníc

Veta

Vektory $\vec{\gamma}_{r+1}, \vec{\gamma}_{r+2}, \dots, \vec{\gamma}_n$ tvoria bázu priestoru riešení homogénnej sústavy (2).

Dôsledok

Nech A je matica typu $m \times n$ a S je priestor riešení homogénnej sústavy lineárnych rovníc s maticou A. Potom

$$d(S) = n - h(A).$$

Dôsledok

Homogénna sústava lineárnych rovníc s n neznámymi, ktorej matica má hodnosť n, má len triviálne riešenie.

Homogénne sústavy lineárnych rovníc

Príklad

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0.$

Príklad

$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

$\{(t, 0, -t); t \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, -1)]$

Podpriestor riešení

Veta

Každý podpriestor priestoru F^n je množinou riešení nejakého homogénneho systému lineárnych rovníc.

Gaussova eliminačná metóda

Príklad

$$
\begin{array}{rrrrl}
x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = 4 \\
 & x_2 & -x_3 & +x_4 & = -3 \\
x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & = 1 \\
 & -7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 3
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\
0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\
1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\
0 & -7 & 3 & 1 & -3
\end{array}\right) \sim \dots \sim
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$x_4 = t \Rightarrow x_1 = -8,\ x_2 = t + 3,\ x_3 = 2t + 6.$

Množina všetkých riešení: $\{(-8, 3+t, 6+2t, t); t \in \mathbb{R}\}$.

Frobeniova veta

Veta

Pre každú maticu A nad poľom F platí $h(A) = h(A^T)$.

$A = (\vec{\alpha}_1 \dots \vec{\alpha}_n)$
$A\vec{x}^T = \vec{0}^T \Leftrightarrow x_1\vec{\alpha}_1 + \dots + x_n\vec{\alpha}_n = \vec{0}$

Veta (Frobeniova)

Nehomogénna sústava lineárnych rovníc (1) je riešiteľná práve vtedy, keď matica sústavy a rozšírená matica sústavy majú rovnakú hodnosť, t.j.

$$h(A) = h(A').$$

Riešenia homogénnej a nehomogénnej sústavy

Veta

Nech $\vec{\alpha}$ je riešenie sústavy lineárnych rovníc

$$A.\vec{\alpha}^T = \vec{\gamma}^T \tag{N}$$

a S je podpriestor pozostávajúci zo všetkých riešení homogénneho systému

$$A.\vec{\alpha}^T = \vec{0}^T. \tag{H}$$

Potom $T = \{\vec{\alpha} + \vec{\beta}; \vec{\beta} \in S\}$ je množina všetkých riešení (N).

Definícia

Definícia

Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f : V \to W$ je lineárne zobrazenie. Potom *jadrom lineárneho zobrazenia* f nazývame množinu

$$\operatorname{Ker} f = \{\vec{\alpha} \in V; f(\vec{\alpha}) = \vec{0}\}$$

a *obrazom lineárneho zobrazenia* f nazývame množinu

$$\operatorname{Im} f = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in V\}.$$

Jadro a obraz

Tvrdenie

Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f : V \to W$ je lineárne zobrazenie. Potom $\operatorname{Ker} f$ je vektorový podpriestor priestoru V a $\operatorname{Im} f$ je vektorový podpriestor priestoru W.

$$V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n] \Rightarrow \operatorname{Im} f = [f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)]$$

Tvrdenie

Nech V s W sú vektorové priestory nad poľom F a $f : V \to W$ je lineárne zobrazenie.
Zobrazenie f je injektívne práve vtedy, keď $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$.

Jadro a obraz

Tvrdenie

Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f : V \to W$ je lineárne zobrazenie.
Zobrazenie f je surjektívne práve vtedy, keď $\operatorname{Im} f = W$.

Dôsledok

Lineárne zobrazenie $f : V \to W$ je izomorfizmus práve vtedy, keď $\operatorname{Im} f = W$ a $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$.

Dimenzia

Veta

Nech V a W sú konečnorozmerné vektorové priestory a $f: V \to W$ je lineárne zobrazenie. Potom

$$d(V) = d(\operatorname{Ker} f) + d(\operatorname{Im} f).$$