Determinanty

18. novembra 2012

Riešenie sústav

Príklad

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2$$

Dostaneme:

$$x_1 = \frac{c_1 a_{22} - c_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

v prípade, že $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Riešenie sústav

Príklad

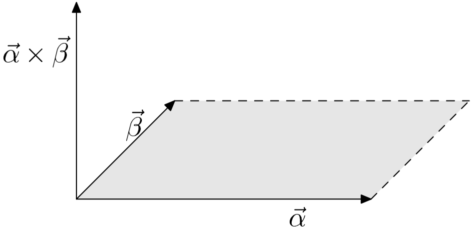
Ak označíme

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21},$$

tak predchádzajúcu rovnosť môžeme vyjadriť ako

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Plocha rovnobežníka

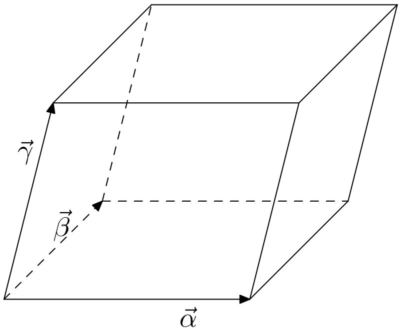


Plocha rovnobežníka

Rovnobežník určený vektormi $\vec{\alpha} = (a_{11}, a_{12})$ a $\vec{\beta} = (a_{21}, a_{22})$. Vektory $(a_{11}, a_{12}, 0)$ a $(a_{21}, a_{22}, 0)$ majú vektorový súčin $(0, 0, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$.

$$S = |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|$$

Objem rovnobežnostena



Objem rovnobežnostena

$$|\vec{\alpha} \times \vec{\beta}||\vec{\gamma}| \cos \alpha = (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}).\vec{\gamma}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha} &= (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \\
\vec{\beta} &= (a_{21}, a_{22}, a_{23}) \\
\vec{\gamma} &= (a_{31}, a_{32}, a_{33})
\end{aligned}$$

$$a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Definícia determinantu

Definícia

V tejto kapitole budeme označovať ako S_n množinu všetkých permutácií množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Dvojica $(\varphi(k), \varphi(s))$ sa volá *inverzia* permutácie φ, ak $k < s$ ale $\varphi(k) > \varphi(s)$. Počet inverzií permutácie φ budeme označovať $i(\varphi)$.

Definícia determinantu

Príklad

Permutácia $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{smallmatrix}\right)$ má 4 inverzie (4,1), (4,3), (4,2), (3,2):

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc}
4 & 1 & & \\
4 & & 3 & \\
4 & & & 2\\
 & & 3 & 2
\end{array}$$

Definícia determinantu

Definícia

Nech A je matica typu $n \times n$ nad poľom F, $A = ||a_{ij}||$. *Determinant matice* A je

$$|A| = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{n\varphi(n)}. \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

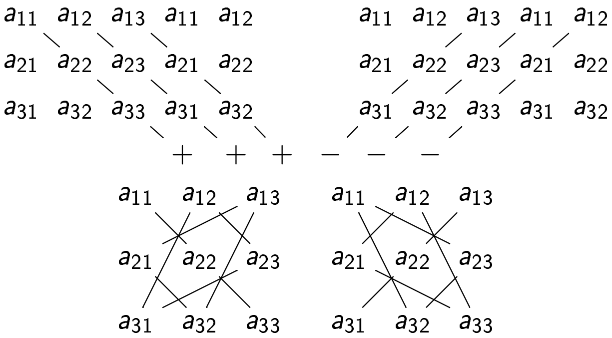
Definícia determinantu

φ	$i(\varphi)$	inverzie
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	0	
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	1	$(3,2)$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	1	$(2,1)$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	2	$(2,1)$ $(3,1)$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	2	$(3,1)$ $(3,2)$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	3	$(3,2)$ $(3,1)$ $(2,1)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Sarrusovo pravidlo



Determinant A^T

Veta

Nech A je matica typu $n \times n$. Potom

$$|A| = |A^T|.$$

Laplaceov rozvoj

Pre i-ty riadok:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Pre j-ty stĺpec:

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

A_{ij} = *algebraický doplnok prvku* a_{ij}.

Laplaceov rozvoj

Pre maticu 3×3:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\\
A_{12} &= a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}\\
A_{13} &= a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\\
A_{21} &= a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}\\
A_{22} &= a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}\\
A_{23} &= a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}\\
A_{31} &= a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}\\
A_{32} &= a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}\\
A_{33} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}$$

Laplaceov rozvoj

Veta

Pre algebraický doplnok prvku a_{rs} štvorcovej matice A platí

$$A_{rs} = (-1)^{r+s}|M_{rs}|$$

Dôsledok (Laplaceov rozvoj determinantu)

Nech A je matica typu $n \times n$. Potom

$$|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}|M_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|M_{i2}| + \ldots + (-1)^{i+n}a_{in}|M_{in}| \tag{2}$$

$$|A| = (-1)^{j+1}a_{1j}|M_{1j}| + (-1)^{j+2}a_{2j}|M_{2j}| + \ldots + (-1)^{j+n}a_{nj}|M_{nj}| \tag{3}$$

Laplaceov rozvoj

Príklad

Nasledujúci determinant vypočítame Laplaceovým rozvojom podľa druhého stĺpca.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$(-2).1 - 3.(-1) = 1$$

Výpočet pomocou riadkových a stĺpcových operácií

Veta

Ak maticu B získame z A vynásobením k-teho riadku skalárom $c \in F$, tak

$$|B| = c|A|.$$

Dôsledok

Ak matica A má nulový riadok, tak $|A| = 0$.

Veta

Ak má matica A dva rovnaké riadky, tak $|A| = 0$.

Výpočet pomocou riadkových a stĺpcových operácií

Veta

Nech matice A a B sú matice typu $n \times n$, ktoré sa líšia len v k-tom riadku. Potom $|A| + |B| = |C|$, kde $c_{ij} = a_{ij} = b_{ij}$ pre $i \neq k$ a $c_{kj} = a_{kj} + b_{kj}$.

Veta

Ak matica B vznikne z A pripočítaním c-násobku niektorého riadku k inému (pričom $c \in F$), tak $|B| = |A|$.

Veta

Ak matica B vznikne z A vzájomnou výmenou dvoch riadkov, tak $|B| = -|A|$. (Výmena 2 riadkov matice mení znamienko determinantu.)

Výpočet pomocou riadkových a stĺpcových operácií

Veta

Ak A je horná trojuholníková matica (pod hlavnou diagonálou má nuly), tak determinant matice A sa rovná súčinu prvkov na diagonále.

$$|A| = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Výpočet pomocou riadkových a stĺpcových operácií

Dôsledok

Determinant diagonálnej matice sa rovná súčinu diagonálnych prvkov.

$$\begin{vmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \dots d_n$$

Veta

Nech A je štvorcová matica typu $n \times n$. Matica A je regulárna práve vtedy, keď $|A| \neq 0$.

Výpočet pomocou riadkových a stĺpcových operácií

Príklad

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Determinant súčinu matíc

Veta

Nech A, B sú dve matice typu $n \times n$ nad poľom F. Potom platí

$$|A.B| = |A|.|B|.$$

Výpočet inverznej matice

Veta

Ak A je regulárna matica typu $n \times n$, tak

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

kde A_{ij} označuje algebraický doplnok prvku a_{ij}.

Výpočet inverznej matice

Maticu

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

nazývame *adjungovaná matica* k matici A.

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{|A|}.$$

Cramerovo pravidlo

Ak matica A je regulárna, tak riešenia sústavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_n \end{array}\right)$$

sú

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},$$

kde A_i označuje maticu, ktorú dostaneme ak v matici A nahradíme i-ty stĺpec stĺpcom $(c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ (čiže pravými stranami).