

Euklidovské vektorové priestory

25. novembra 2012

Zo strednej školy

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \alpha,$$

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}.$$

Definícia

Definícia

Nech $(V, +, \cdot)$ je vektorový priestor nad poľom \mathbb{R} . Potom zobrazenie $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva *skalárny súčin* na V , ak pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a $c \in \mathbb{R}$ platí

- (i) $g(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = g(\vec{\beta}, \vec{\alpha})$,
- (ii) $g(\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = g(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) + g(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$,
- (iii) $g(c\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = cg(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$,
- (iv) ak $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, tak $g(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) > 0$.

Vektorový priestor V spolu so skalárnym súčinom g nazývame *euklidovským vektorovým priestorom*.

Definícia

Namiesto $g(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ budeme používať označenie $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$.

- (i) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle$,
- (ii) $\langle \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle = \langle \vec{\alpha}, \vec{\gamma} \rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle$,
- (iii) $\langle c\vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = c\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$,
- (iv) ak $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, tak $\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle > 0$.

T.j. g je symetrické (i), kladne definitné (iv), a bilineárne (ii) a (iii).

Príklady

Príklad

\mathbb{R}^n s obvyklým sčítaním a skalárnym násobkom

Pre vektory $\vec{\alpha} = (a_1, \dots, a_n)$ a $\vec{\beta} = (b_1, \dots, b_n)$ definujeme

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

V prípade \mathbb{R}^2 alebo \mathbb{R}^3 dostávame skalárny súčin ako ho poznáte zo strednej školy.

Vlastnosti z definície skalárneho súčinu sa overia pomerne

Príklady

Príklad

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + 2a_2 b_2$$

je skalárny súčin na \mathbb{R}^2 .

Príklady

Príklad

Všeobecnejšie:

$$g(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (a_1 \dots a_n) C \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$
$$g(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i c_{ij} b_j.$$

Podmienka (i) platí ak C je symetrická.

Podmienky (ii) a (iii) sú splnené pre ľubovoľnú maticu.

S podmienkou (iv) je to komplikovanejšie.

Príklady

Príklad

$C(a, b)$ = množina všetkých spojitých funkcií $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Veľkosť vektora

Definícia

Nech V je euklidovský vektorový priestor. Potom pre $\vec{\alpha} \in V$ definujeme veľkosť vektora $\vec{\alpha}$ ako

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}.$$

Veľkosť vektora

Tvrdenie

Nech V je euklidovský vektorový priestor. Pre $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a $c \in \mathbb{R}$:

- (i) $|\vec{\alpha}| \geq 0$
- (ii) $|\vec{\alpha}| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$
- (iii) $|c\vec{\alpha}| = |c||\vec{\alpha}|$
- (iv) $|\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle| \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ (Schwarzova nerovnosť)
- (v) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ (trojuholníková nerovnosť)

V (iv) nastáva rovnosť práve vtedy, keď vektor $\vec{\alpha}$ je násobkom vektora $\vec{\beta}$.

V (v) nastane rovnosť, ak $\vec{\alpha}$ je nezáporným násobkom $\vec{\beta}$.

Schwarzova nerovnosť

Schwarzova nerovnosť pre priestor \mathbb{R}^n s obvyklým skalárnym súčinom sa často používa pri dôkaz rôznych nerovností.

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2 \sum_{k=1}^n y_k^2} \quad (1)$$

Uhol vektorov

Definícia

Nech V je euklidovský vektorový priestor.

Uhol dvoch nenulových vektorov definujeme ako taký uhol, pre ktorý platí

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|}.$$

V prípade, že niektorý z vektorov je nulový, položíme $\varphi = 0$.

Ortogonalné vektory

Definícia

Vektory $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ nazveme *kolmé (ortogonálne)*, ak $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0$.

O k -tici vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$ hovoríme, že tieto vektory sú ortogonálne, ak ľubovoľné 2 z nich sú ortogonálne, t.j. $\langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j \rangle = 0$ pre každé $i \neq j$.

Tvrdenie

Nech V je euklidovský vektorový priestor. Ak nenulové vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$ sú ortogonálne, tak sú lineárne nezávislé

Ortogonálny doplnok

Definícia

Nech V je euklidovský priestor a $M \subseteq V$. Potom

$$M^\perp = \{\vec{\alpha} \in V; \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0 \text{ pre všetky } \vec{\beta} \in M\}$$

sa nazýva *ortogonálny doplnok* množiny M .

Tvrdenie

Nech V je euklidovský priestor a $M \subseteq V$. Potom M^\perp je vektorový priestor priestoru V .

Ortogonálny doplnok

Tvrdenie

Ak V je euklidovský priestor a $M \subseteq N \subseteq V$, tak

$$N^\perp \subseteq M^\perp.$$

Lema

Nech V je euklidovský priestor a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k \in V$. Nech $S = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k]$ je podpriestor vygenerovaný týmito vektormi. Potom $S^\perp = \{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k\}^\perp$.

Ortogonalný doplnok

Tvrdenie

Ak V je euklidovský priestor a S, T sú podpriestory V , tak

$$(S + T)^\perp = S^\perp \cap T^\perp.$$

Ortonormálna báza

Definícia

Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sa nazývajú *ortonormálne*, ak pre všetky i platí $|\vec{\alpha}_i| = 1$ a pre $i \neq j$ platí

$$\langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j \rangle = 0.$$

Definícia

Ak vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú ortonormálne a tvoria bázu vektorového priestoru V , tak túto bázu nazývame *ortonormálna báza*.

Príklad

$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ v priestore \mathbb{R}^n so štandardným skalárnym súčinom
 $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \sum_{k=1}^n a_k b_k$.

Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

Veta

Nech V je euklidovský vektorový priestor a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V . Potom existuje ortonormálna báza $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n$ priestoru V .

Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

$$\vec{\gamma}_1 = \vec{\alpha}_1$$

$$\vec{\gamma}_2 = \vec{\alpha}_2 + c_{21}\vec{\gamma}_1$$

$$\vec{\gamma}_3 = \vec{\alpha}_3 + c_{31}\vec{\gamma}_1 + c_{32}\vec{\gamma}_2$$

⋮

$$\vec{\gamma}_n = \vec{\alpha}_n + c_{n1}\vec{\gamma}_1 + c_{n2}\vec{\gamma}_2 + \dots + c_{n,n-1}\vec{\gamma}_{n-1}$$

$$c_{k+1,i} = -\frac{\langle \vec{\alpha}_{k+1}, \vec{\gamma}_i \rangle}{\langle \vec{\gamma}_i, \vec{\gamma}_i \rangle}$$

Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

Príklad

$$V = [(1, 0, 1, 0), (0, 2, -1, 1), (0, 2, 1, 3)]$$

$$\vec{\gamma}_1 = (1, 0, 1, 0)$$

$$\vec{\gamma}_2 = \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\vec{\gamma}_3 = \left(-\frac{12}{11}, -\frac{4}{11}, \frac{12}{11}, \frac{20}{11}\right)$$

Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

Príklad

$$\vec{\beta}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)$$

$$\vec{\beta}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\vec{\beta}_3 = \frac{11}{4\sqrt{41}}\left(-\frac{12}{11}, -\frac{4}{11}, \frac{12}{11}, \frac{20}{11}\right) = \frac{1}{4\sqrt{41}}(-12, -4, 12, 20) = \frac{1}{\sqrt{41}}(-3,$$

Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

Príklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma}_1 = \vec{\alpha}_1 = (1, 0, 0, -1)$$

$$\vec{\gamma}_2 = (0, 1, 0, 1) + \frac{1}{2}(1, 0, 0, -1) = \left(\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{\gamma}_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$$

Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

Príklad

$$\vec{\beta}_1 = \frac{\vec{\gamma}_1}{|\vec{\gamma}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)$$

$$\vec{\beta}_2 = \frac{\vec{\gamma}_2}{|\vec{\gamma}_2|} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{\beta}_3 = \frac{\vec{\gamma}_3}{|\vec{\gamma}_3|} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$$

Ortogonalný doplnok

Veta

Nech S je podpriestor konečnorozmerného euklidovského priestoru V . Potom ľubovoľný vektor $\vec{\gamma} \in V$ sa dá jednoznačne vyjadriť ako

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta},$$

kde $\vec{\alpha} \in S$ a $\vec{\beta} \in S^\perp$.

Definícia

V situácii z predošlej vety sa vektor $\vec{\alpha}$ nazýva *ortogonalná projekcia* vektora $\vec{\gamma}$ na podpriestor S .

Ortogonalný doplnok

Dôsledok

Nech S, T sú podpriestory konečnorozmerného priestoru V . Potom:

- (i) $V = S \oplus S^\perp$
- (ii) $(S^\perp)^\perp = S$
- (iii) $(S \cap T)^\perp = S^\perp + T^\perp$.