Euklidovské vektorové priestory

25. novembra 2012

Zo strednej školy

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \cos \alpha,$$

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}.$$

Definícia

Definícia

Nech $(V, +, \cdot)$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$. Potom zobrazenie $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ sa nazýva *skalárny súčin* na V, ak pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a $c \in \mathbb{R}$ platí

(i) $g(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = g(\vec{\beta}, \vec{\alpha})$,

(ii) $g(\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = g(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) + g(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$,

(iii) $g(c\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = cg(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$,

(iv) ak $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, tak $g(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) > 0$.

Vektorový priestor V spolu so skalárnym súčinom g nazývame *euklidovským vektorovým priestorom.*

Definícia

Namiesto $g(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ budeme používať označenie $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$.

(i) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle$,

(ii) $\langle \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle = \langle \vec{\alpha}, \vec{\gamma} \rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle$,

(iii) $\langle c\vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = c\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$,

(iv) ak $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, tak $\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle > 0$.

T.j. g je symetrické (i), kladne definitné (iv), a bilineárne (ii) a (iii).

Príklady

Príklad

$\mathbb{R}^n$ s obvyklým sčitovaním a skalárnym násobkom
Pre vektory $\vec{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n)$ a $\vec{\beta} = (b_1, \ldots, b_n)$ definujeme

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k .$$

V prípade $\mathbb{R}^2$ alebo $\mathbb{R}^3$ dostávame skalárny súčin ako ho poznáte zo strednej školy.
Vlastnosti z definície skalárneho súčinu sa overia pomerne

Príklady

Príklad

$$\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2a_2b_2$$

je skalárny súčin na $\mathbb{R}^2$.

Príklady

Príklad

Všeobecnejšie:

$$g(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = (a_1 \dots a_n) C \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$g(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i c_{ij} b_j.$$

Podmienka (i) platí ak C je symetrická.
Podmienky (ii) a (iii) sú splnené pre ľubovoľnú maticu.
S podmienkou (iv) je to komplikovanejšie.

Príklady

Príklad

$C(a,b)$ = množina všetkých spojitých funkcií $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$.

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Veľkosť vektora

Definícia

Nech V je euklidovský vektorový priestor. Potom pre $\vec{\alpha} \in V$ definujeme veľkosť vektora $\vec{\alpha}$ ako

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}.$$

Veľkosť vektora

Tvrdenie

Nech V je euklidovský vektorový priestor. Pre $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a $c \in \mathbb{R}$:

(i) $|\vec{\alpha}| \geq 0$

(ii) $|\vec{\alpha}| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$

(iii) $|c\vec{\alpha}| = |c||\vec{\alpha}|$

(iv) $|\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle| \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ (*Schwarzova nerovnosť*)

(v) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ (*trojuholníková nerovnosť*)

V (iv) *nastáva rovnosť práve vtedy, keď vektor $\vec{\alpha}$ je násobkom vektora $\vec{\beta}$.*

V (v) *nastane rovnosť, ak $\vec{\alpha}$ je nezáporným násobkom $\vec{\beta}$.*

Schwarzova nerovnosť

Schwarzova nerovnosť pre priestor $\mathbb{R}^n$ s obvyklým skalárnym súčinom sa často používa pri dôkaz rôznych nerovností.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2} \tag{1}$$

Uhol vektorov

Definícia

Nech V je euklidovský vektorový priestor.
Uhol dvoch nenulových vektorov definujeme ako taký uhol, pre ktorý platí

$$\cos\varphi = \frac{\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}.$$

V prípade, že niektorý z vektorov je nulový, položíme $\varphi = 0$.

Ortogonálne vektory

Definícia

Vektory $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ nazveme *kolmé* (*ortogonálne*), ak $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0$.
O k-tici vektorov $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_k$ hovoríme, že tieto vektory sú ortogonálne, ak ľubovoľné 2 z nich sú ortogonálne, t.j. $\langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j \rangle = 0$ pre každé $i \neq j$.

Tvrdenie

Nech V je euklidovský vektorový priestor. Ak nenulové vektory $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_k$ sú ortogonálne, tak sú lineárne nezávislé

Ortogonálny doplnok

Definícia

Nech V je euklidovský priestor a $M \subseteq V$. Potom

$$M^{\perp} = \{\vec{\alpha} \in V; \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0 \text{ pre všetky } \vec{\beta} \in M\}$$

sa nazýva *ortogonálny doplnok* množiny M.

Tvrdenie

Nech V je euklidovský priestor a $M \subseteq V$. Potom $M^{\perp}$ je vektorový priestor priestoru V.

Ortogonálny doplnok

Tvrdenie

Ak V je euklidovský priestor a $M \subseteq N \subseteq V$, tak

$$N^{\perp} \subseteq M^{\perp}.$$

Lema

Nech V je euklidovský priestor a $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_k \in V$. Nech $S = [\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_k]$ je podpriestor vygenerovaný týmito vektormi. Potom $S^{\perp} = \{\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_k\}^{\perp}$.

Ortogonálny doplnok

Tvrdenie

Ak V je euklidovský priestor a S, T sú podpriestory V, tak

$$(S+T)^{\perp} = S^{\perp} \cap T^{\perp}.$$

Ortonormálna báza

Definícia

Vektory $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ sa nazývajú *ortonormálne*, ak pre všetky i platí $|\vec{\alpha}_i| = 1$ a pre $i \neq j$ platí

$$\langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j \rangle = 0.$$

Definícia

Ak vektory $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ sú ortonormálne a tvoria bázu vektorového priestoru V, tak túto bázu nazývame *ortonormálna báza.*

Príklad

$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ v priestore $\mathbb{R}^n$ so štandardným skalárnym súčinom $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.

Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

Veta

Nech V je euklidovský vektorový priestor a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V. Potom existuje ortonormálna báza $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n$ priestoru V.

Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_1 &= \vec{\alpha}_1 \\
\vec{\gamma}_2 &= \vec{\alpha}_2 + c_{21}\vec{\gamma}_1 \\
\vec{\gamma}_3 &= \vec{\alpha}_3 + c_{31}\vec{\gamma}_1 + c_{32}\vec{\gamma}_2 \\
&\vdots \\
\vec{\gamma}_n &= \vec{\alpha}_n + c_{n1}\vec{\gamma}_1 + c_{n2}\vec{\gamma}_2 + \ldots + c_{n,n-1}\vec{\gamma}_{n-1}
\end{aligned}$$

$$c_{k+1,i} = -\frac{\langle \vec{\alpha}_{k+1}, \vec{\gamma}_i \rangle}{\langle \vec{\gamma}_i, \vec{\gamma}_i \rangle}$$

Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

Príklad

$$V = [(1,0,1,0),(0,2,-1,1),(0,2,1,3)]$$

$$\vec{\gamma}_1 = (1,0,1,0)$$
$$\vec{\gamma}_2 = (\frac{1}{2},2,-\frac{1}{2},1)$$
$$\vec{\gamma}_3 = \left(-\frac{12}{11},-\frac{4}{11},\frac{12}{11},\frac{20}{11}\right)$$

Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

Príklad

$$\vec{\beta}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)$$

$$\vec{\beta}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}(\frac{1}{2},2,-\frac{1}{2},1)$$

$$\vec{\beta}_3 = \frac{11}{4\sqrt{41}}\left(-\frac{12}{11},-\frac{4}{11},\frac{12}{11},\frac{20}{11}\right) = \frac{1}{4\sqrt{41}}(-12,-4,12,20) = \frac{1}{\sqrt{41}}(-3,$$

Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

Príklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma}_1 = \vec{\alpha}_1 = (1, 0, 0, -1)$$

$$\vec{\gamma}_2 = (0, 1, 0, 1) + \frac{1}{2}(1, 0, 0, -1) = \left(\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{\gamma}_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$$

Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

Príklad

$$\vec{\beta}_1 = \frac{\vec{\gamma}_1}{|\vec{\gamma}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)$$

$$\vec{\beta}_2 = \frac{\vec{\gamma}_2}{|\vec{\gamma}_2|} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{\beta}_3 = \frac{\vec{\gamma}_3}{|\vec{\gamma}_3|} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$$

Ortogonálny doplnok

Veta

Nech S je podpriestor konečnorozmerného euklidovského priestoru V. Potom ľubovoľný vektor $\vec{\gamma} \in V$ sa dá jednoznačne vyjadriť ako

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta},$$

kde $\vec{\alpha} \in S$ a $\vec{\beta} \in S^{\perp}$.

Definícia

V situácii z predošlej vety sa vektor $\vec{\alpha}$ nazýva *ortogonálna projekcia* vektora $\vec{\gamma}$ na podpriestor S.

Ortogonálny doplnok

Dôsledok

Nech S, T sú podpriestory konečnorozmerného priestoru V. Potom:

(i) $V = S \oplus S^{\perp}$

(ii) $(S^{\perp})^{\perp} = S$

(iii) $(S \cap T)^{\perp} = S^{\perp} + T^{\perp}$.