



## *Euklidovské vektorové priestory*

25. novembra 2012



Zo strednej školy

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \alpha,$$

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}.$$



## Definícia

### Definícia

Nech  $(V, +, \cdot)$  je vektorový priestor nad poľom  $\mathbb{R}$ . Potom zobrazenie  $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  sa nazýva *skalárny súčin* na  $V$ , ak pre ľubovoľné  $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$  a  $c \in \mathbb{R}$  platí

- (i)  $g(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = g(\vec{\beta}, \vec{\alpha}),$
- (ii)  $g(\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = g(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) + g(\vec{\beta}, \vec{\gamma}),$
- (iii)  $g(c\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = cg(\vec{\alpha}, \vec{\beta}),$
- (iv) ak  $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ , tak  $g(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) > 0.$

Vektorový priestor  $V$  spolu so skalárnym súčinom  $g$  nazývame *euklidovským vektorovým priestorom*.

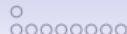


## Definícia

Namiesto  $g(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$  budeme používať označenie  $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$ .

- (i)  $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle$ ,
- (ii)  $\langle \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle = \langle \vec{\alpha}, \vec{\gamma} \rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle$ ,
- (iii)  $\langle c\vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = c\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$ ,
- (iv) ak  $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ , tak  $\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle > 0$ .

T.j.  $g$  je symetrické (i), kladne definitné (iv), a bilineárne (ii) a (iii).



## Príklady

### Príklad

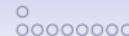
$\mathbb{R}^n$  s obvyklým sčítovaním a skalárny násobkom

Pre vektory  $\vec{\alpha} = (a_1, \dots, a_n)$  a  $\vec{\beta} = (b_1, \dots, b_n)$  definujeme

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

V prípade  $\mathbb{R}^2$  alebo  $\mathbb{R}^3$  dostávame skalárny súčin ako ho poznáte zo strednej školy.

Vlastnosti z definície skalárneho súčinu sa overia pomerne

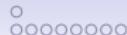


## Príklady

### Príklad

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + 2a_2 b_2$$

je skalárny súčin na  $\mathbb{R}^2$ .



## Príklady

### Príklad

Všeobecnejšie:

$$g(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (a_1 \dots a_n) C \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$g(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i c_{ij} b_j.$$

Podmienka (i) platí ak  $C$  je symetrická.

Podmienky (ii) a (iii) sú splnené pre ľubovoľnú maticu.

S podmienkou (iv) je to komplikovanejšie.

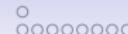


## Príklady

### Príklad

$C(a, b)$  = množina všetkých spojitéch funkcií  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$



## *Veľkosť vektora*

### *Definícia*

Nech  $V$  je euklidovský vektorový priestor. Potom pre  $\vec{\alpha} \in V$  definujeme veľkosť vektora  $\vec{\alpha}$  ako

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}.$$



## *Velkosť vektora*

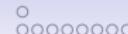
### *Tvrdenie*

Nech  $V$  je euklidovský vektorový priestor. Pre  $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$  a  $c \in \mathbb{R}$ :

- (i)  $|\vec{\alpha}| \geq 0$
- (ii)  $|\vec{\alpha}| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$
- (iii)  $|c\vec{\alpha}| = |c||\vec{\alpha}|$
- (iv)  $|\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle| \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$  (*Schwarzova nerovnosť*)
- (v)  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$  (*trojuholníková nerovnosť*)

V (iv) nastáva rovnosť práve vtedy, keď vektor  $\vec{\alpha}$  je násobkom vektora  $\vec{\beta}$ .

V (v) nastane rovnosť, ak  $\vec{\alpha}$  je nezáporným násobkom  $\vec{\beta}$ .



## Schwarzova nerovnosť

Schwarzova nerovnosť pre priestor  $\mathbb{R}^n$  s obvyklým skalárny súčinom sa často používa pri dôkaz rôznych nerovností.

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2 \sum_{k=1}^n y_k^2} \quad (1)$$



## Uhол vektorov

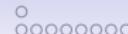
### *Definícia*

Nech  $V$  je euklidovský vektorový priestor.

Uhol dvoch nenulových vektorov definujeme ako taký uhol, pre ktorý platí

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|}.$$

V prípade, že niektorý z vektorov je nulový, položíme  $\varphi = 0$ .



## Ortogonalne vektory

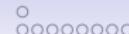
### Definícia

Vektory  $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$  nazveme *kolmé (ortogonalné)*, ak  $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0$ .

O  $k$ -tici vektorov  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$  hovoríme, že tieto vektory sú *ortogonalné*, ak ľubovoľné 2 z nich sú ortogonalné, t.j.  $\langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j \rangle = 0$  pre každé  $i \neq j$ .

### Tvrdenie

Nech  $V$  je euklidovský vektorový priestor. Ak nenulové vektory  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$  sú ortogonalné, tak sú lineárne nezávislé



## Ortogonalny doplnok

### Definícia

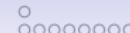
Nech  $V$  je euklidovský priestor a  $M \subseteq V$ . Potom

$$M^\perp = \{\vec{\alpha} \in V; \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0 \text{ pre všetky } \vec{\beta} \in M\}$$

sa nazýva *ortogonalny doplnok* množiny  $M$ .

### Tvrdenie

Nech  $V$  je euklidovský priestor a  $M \subseteq V$ . Potom  $M^\perp$  je vektorový priestor priestoru  $V$ .



## Ortogonalny doplnok

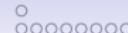
### *Tvrdenie*

Ak  $V$  je euklidovský priestor a  $M \subseteq N \subseteq V$ , tak

$$N^\perp \subseteq M^\perp.$$

### *Lema*

Nech  $V$  je euklidovský priestor a  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k \in V$ . Nech  $S = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k]$  je podpriestor vygenerovaný týmito vektormi. Potom  $S^\perp = \{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k\}^\perp$ .

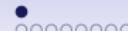


## Ortogonalny doplnok

### Tvrdenie

Ak  $V$  je euklidovský priestor a  $S, T$  sú podpriestory  $V$ , tak

$$(S + T)^\perp = S^\perp \cap T^\perp.$$



## Ortonormálna báza

### Definícia

Vektory  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$  sa nazývajú *ortonormálne*, ak pre všetky  $i$  platí  $|\vec{\alpha}_i| = 1$  a pre  $i \neq j$  platí

$$\langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j \rangle = 0.$$

### Definícia

Ak vektory  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$  sú ortonormálne a tvoria bázu vektorového priestoru  $V$ , tak túto bázu nazývame *ortonormálna báza*.

### Príklad

$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  v priestore  $\mathbb{R}^n$  so štandardným skalárnym súčinom  $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \sum_{k=1}^n a_k b_k$ .



## Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

### Veta

Nech  $V$  je euklidovský vektorový priestor a  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$  je báza priestoru  $V$ . Potom existuje ortonormálna báza  $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n$  priestoru  $V$ .



## Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

$$\vec{\gamma}_1 = \vec{\alpha}_1$$

$$\vec{\gamma}_2 = \vec{\alpha}_2 + c_{21}\vec{\gamma}_1$$

$$\vec{\gamma}_3 = \vec{\alpha}_3 + c_{31}\vec{\gamma}_1 + c_{32}\vec{\gamma}_2$$

⋮

$$\vec{\gamma}_n = \vec{\alpha}_n + c_{n1}\vec{\gamma}_1 + c_{n2}\vec{\gamma}_2 + \dots + c_{n,n-1}\vec{\gamma}_{n-1}$$

$$c_{k+1,i} = -\frac{\langle \vec{\alpha}_{k+1}, \vec{\gamma}_i \rangle}{\langle \vec{\gamma}_i, \vec{\gamma}_i \rangle}$$



## Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

*Priklad*

$$V = [(1, 0, 1, 0), (0, 2, -1, 1), (0, 2, 1, 3)]$$

$$\vec{\gamma}_1 = (1, 0, 1, 0)$$

$$\vec{\gamma}_2 = \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\vec{\gamma}_3 = \left(-\frac{12}{11}, -\frac{4}{11}, \frac{12}{11}, \frac{20}{11}\right)$$



## Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

*Príklad*

$$\vec{\beta}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)$$

$$\vec{\beta}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\vec{\beta}_3 = \frac{11}{4\sqrt{41}}\left(-\frac{12}{11}, -\frac{4}{11}, \frac{12}{11}, \frac{20}{11}\right) = \frac{1}{4\sqrt{41}}(-12, -4, 12, 20) = \frac{1}{\sqrt{41}}(-3,$$



## Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

*Priklad*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma}_1 = \vec{\alpha}_1 = (1, 0, 0, -1)$$

$$\vec{\gamma}_2 = (0, 1, 0, 1) + \frac{1}{2}(1, 0, 0, -1) = \left(\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{\gamma}_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$$



## Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

Príklad

$$\vec{\beta}_1 = \frac{\vec{\gamma}_1}{|\vec{\gamma}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)$$

$$\vec{\beta}_2 = \frac{\vec{\gamma}_2}{|\vec{\gamma}_2|} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2} \right)$$

$$\vec{\beta}_3 = \frac{\vec{\gamma}_3}{|\vec{\gamma}_3|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3} \right)$$



## Ortogonalny doplnok

### Veta

Nech  $S$  je podpriestor konečnorozmerného euklidovského priestoru  $V$ . Potom ľubovoľný vektor  $\vec{\gamma} \in V$  sa dá jednoznačne vyjadriť ako

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta},$$

kde  $\vec{\alpha} \in S$  a  $\vec{\beta} \in S^\perp$ .

### Definícia

V situácii z predošej vety sa vektor  $\vec{\alpha}$  nazýva *ortogonálna projekcia* vektora  $\vec{\gamma}$  na podpriestor  $S$ .



## Ortogonalny doplnok

### Dôsledok

Nech  $S, T$  sú podpriestory konečnorozmerného priestoru  $V$ . Potom:

- (i)  $V = S \oplus S^\perp$
- (ii)  $(S^\perp)^\perp = S$
- (iii)  $(S \cap T)^\perp = S^\perp + T^\perp.$