Tento súbor bude obsahovať riešenie niektorých úloh z prednášok. Číslovanie úloh je totožné s textom prednášok.

Množiny a zobrazenia

Zobrazenia

Úloha 2.2.1: Predpokladajme, že $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. Máme dokázať, že ku každému $z \in Z$ existuje $y \in Y$ také, že $g(y) = z$. Z toho, že $g \circ f$ je surjekcia, vieme, že existuje $x_0 \in X$ také, že $g \circ f(x_0) = g(f(x_0)) = z$. Potom stačí za y zobrať $f(x_0)$.

Ak g je surjekcia $g \circ f$ nemusí byť surjekcia (t.j. opačná implikácia neplatí). Kontrapríklad: $g = id_X$ a f je ľubovoľné zobrazenie z X do X, ktoré nie je surjektívne.

Ak $g \circ f$ je surjekcia, f nemusí byť surjekcia. Kontrapríklad: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 1$, $g: \mathbb{R} \to \{1\}$, $g(x) = 1$.

Úloha 2.2.4: Vo všetkých častiach máme dokázať ekvivalenciu nejakých dvoch podmienok. To sa často robí tak, že ukážeme obe implikácie A $\Rightarrow$ B aj B $\Rightarrow$ A. Tento postup použijeme aj tu.

a) $\boxed{\Rightarrow}$ Predpokladajme, že f je injekcia. Chceme ukázať, že existuje $g: Y \to X$ také, že $g \circ f = id_X$. Pretože $X \neq \emptyset$, existuje nejaký prvok množiny X, označíme ho x_0. Zobrazenie g definujeme nasledovne: Ak $y = f(x)$ pre nejaké $x \in X$ (inak povedané, ak $y \in f[X]$), tak položíme $g(y) = x$. (Zobrazenie f je injektívne, preto existuje jediné také x.) Ak také x neexistuje, tak položíme $g(y) = x_0$. Pri takto definovanom g skutočne platí $g(f(x)) = x$ pre všetky $x \in X$, teda $g \circ f = id_X$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Predpokladajme, že existuje g také, že $g \circ f = id_X$. Potom dostaneme:
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$,
čo je ekvivalentné s tým, že f je prosté.

b) $\boxed{\Rightarrow}$ Nech f je surjekcia. Chceme pre každé $y \in Y$ definovať $g(y)$ tak, aby zobrazenie g spĺňalo uvedené vlastnosti. Pretože ku každému $y \in Y$ (podľa definície surjekcie) existuje aspoň jedno x s vlastnosťou $f(x) = y$, zvolíme nejaké také x za $g(y)$. Potom skutočne platí $f(g(y)) = y$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Predpokladajme, že existuje g s vlastnosťou $f \circ g = id_Y$. Potom $f(g(y)) = y$, čiže pre každé y existuje aspoň jeden prvok z množiny X (konkrétne je to prvok $g(y)$), taký, že $f(x) = y$ (t.j. x sa zobrazí na y). Teda f je surjektívne.

c) $\boxed{\Rightarrow}$ Ak g je inverzné k f, t.j. $g \circ f = id_X$ a $f \circ g = id_Y$, tak podľa častí a) a b) dostaneme, že f je súčasne injekcia aj surjekcia, teda je to bijekcia.

$\boxed{\Leftarrow}$ Naopak, ak f je bijekcia (teda f je súčasne injekcia a surjekcia), tak z častí a) a b) vyplýva existencia zobrazení $g, h: Y \to X$ s vlastnosťami $g \circ f = id_X$ a $f \circ h = id_Y$. Nám stačí ukázať, že v oboch prípadoch ide o to isté zobrazenie, t.j. $g = h$ (z toho už priamo vyplýva, že toto zobrazenie je inverzné k f). Skutočne nasledujúcim výpočtom dostaneme:
$g = g \circ id_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = id_X \circ h = h$.

Úloha 2.2.5: Máme overiť, či pre každé $y \in Y$ platí $g(y) = h(y)$. Upravujme: $g(y) \overset{(1)}{=} g(f \circ h(y))) = g(f(h(y))) = (g \circ f)(h(y)) \overset{(2)}{=} h(y)$. (V (1) sme využili, že $f \circ h = id_Y$ a v (2) sme využili, že $g \circ f = id_X$.)

Úloha 2.2.8: Predpokladajme, že $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Y \to Z$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Najprv ukážme, že ak f je surjekcia, tak platí implikácia $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$. Máme dokázať, že pre všetky $y \in Y$ platí, $g(y) = h(y)$. Nech y je ľubovoľný prvok Y. Ku

y existuje $x_0 \in X$ také, že $f(x_0) = y$ (lebo f je surjekcia). Použitím rovnosti $g \circ f = h \circ f$ potom dostaneme $g(y) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0) = (h \circ f)(x_0) = h(f(x_0)) = h(y)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Teraz predpokladáme platnosť implikácie $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$ a chceme dokázať, že f je surjekcia. Postupujme nepriamo. Nech f nie je surjekcia. Teda existuje $y_0 \in Y$, ktoré nemá žiadny vzor v zobrazení f. Zvoľme si zobrazenia $g, h \colon Y \to \{0,1\}$ tak, že $g(y) = 0$ pre všetky $y \in Y$ a $h(y) = 0$ pre $y \neq y_0$ a $h(y) = 1$. Potom $g \neq h$, ale $g \circ f = h \circ f$, teda uvedená implikácia neplatí.

Úloha 2.2.11$^+$: Nech $f \colon X \to Y$, $g \colon Y \to Z$.
a) Neplatí. Kontrapríklad: $f \colon \{0,1\} \to \{0\}$, $f(x) = 0$ pre $x = 0,1$, $A = \{0\}$, $B = \{1\}$. V takomto prípade platí $f[A \cap B] = f[\emptyset] = \emptyset$ a $f[A] \cap f[B] = \{1\}$.
b) Platí. Máme dokázať, že $y \in f[A \cap B] \Rightarrow y \in f[A] \cap f[B]$.
$y \in f[A \cap B] \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \cap B \wedge f(x) = y) \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y) \Rightarrow [(\exists x)x \in A \wedge f(x) = y] \wedge [(\exists x)x \in B \wedge f(x) = y] \Leftrightarrow y \in f[A] \cap f[B]$
c) Neplatí. Rovnaký kontrapríklad ako v a).
d) Platí. $x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \Leftrightarrow f(x) \in A \vee f(x) \in B \Leftrightarrow [x \in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B)]$ $\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
e) Platí. Vyplýva to z d), f) Platí. Vyplýva z e).
g) Neplatí. (Ako kontrapríklad stačí zobrať ľubovoľné zobrazenie, ktoré nie je surjektívne a za A položiť celý obor hodnôt.)
h,k) Platia.
i,j) Neplatia. Napríklad pre $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $A = \langle 0, 2\pi \rangle$ platí $f^{-1}(f[A]) = \mathbb{R}$.

Permutácie

Úloha 2.3.3: Matematickou indukciou dokážeme, že platí $\varphi^{3n} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right) = id$.
1° Pre $n = 0$, $n = 1$ to stačí overiť výpočtom.
2° $\varphi^{3(n+1)} = \varphi^{3n+3} = \varphi^3 \circ \varphi^{3n} = id \circ \varphi^{3n} = \varphi^{3n} \overset{IP}{=} id$.

Grupy a polia

Grupy

Úloha 3.2.1:
a) Netvorí grupu, lebo napríklad 2 nemá v $\mathbb{Z}$ inverzný prvok vzhľadom na násobenie. b) Netvoria grupu, lebo 0 nemá inverzný prvok. c,d) Sú grupy. e) Nie. f,g,h,i) Áno. j) Nie. k) Áno.

Úloha 3.2.2: Je to grupa. (Asociatívnosť vyplýva z asociatívnosti skladania zobrazení, neutrálny prvok je identická permutácia $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, inverzný prvok je inverzná permutácia.) Nie je komutatívna. (Stačí si všimnúť, že tabuľka grupovej operácie nie je symetrická podľa diagonály.) Tabuľka vyzerá takto (kvôli prehľadnosti sme použili jednoriadkový zápis permutácií – vynechali sme prvý riadok, ktorý je vždy rovnaký):

	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$

Úloha 3.2.7: M_1 tvorí s operáciou skladania zobrazení grupu. Zloženie dvoch bijekcií je opäť bijekcia, teda $\circ$ je binárna operácia na M_1. Asociatívnosť je splnená vďaka tomu, že skladanie zobrazení je asociatívne. Neutrálny prvok je $id_{\mathbb{Z}}$. Inverzný prvok je inverzné zobrazenie, vieme, že ku každej bijekcii inverzné zobrazenie existuje.

M_2: V tomto prípade je jediný problém overiť, či $\circ$ je binárna operácia na M_2, čiže či zloženie dvoch takýchto zobrazení je opäť z M_2. Nech $g, f \in M_2$, dokážeme, že aj $g \circ f \in M_2$. Označme $A_g = \{z \in \mathbb{Z} : g(z) = z\}$ a $A_f = \{z \in \mathbb{Z} : f(z) = z\}$. Ak pre z platí $f(z) \in A_g$ a $z \in A_f$, tak $g(f(z)) = f(z) = z$. Podmienka $g(f(z)) \neq z$ môže byť teda splnená iba pre $z \notin A_f$ (tých je konečne veľa, lebo $f \in M_2$) alebo $f(z) \notin A_g$ (takých $f(z)$ je konečne veľa a keďže f je bijekcia, aj počet z, ktoré spĺňajú túto podmienku bude rovnaký). Teda iba pre konečne veľa z sa $g(f(z)) \neq z$, čo znamená, že $g \circ f \in M_2$. (Asociatívnosť, existencia neutrálneho a inverzného prvku sa overí podobne ako v prvom prípade.)

Zobrazenia $g(z) = z+1$, $f(z) = z-1$ patria do množiny M_3, ale $g \circ f = id$ do nej nepatrí. Teda $\circ$ nie je binárna operácia na M_3.

Polia

Úloha 3.3.2: Všetky úlohy sa riešia veľmi podobne, podrobnejšie rozoberieme len jednu z nich.

a) Nie, lebo i nemá inverzný prvok vzhľadom na sčítanie ($-i \notin F$).

b) Áno. Inverzný prvok k $a+ib$ je $\frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib} \cdot \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} \in F$

c) Nie. Napríklad 2 nemá inverzný prvok vzhľadom na násobenie.

d) Je zrejmé, že $+$ je binárna operácia na M (súčet dvoch čísel z M patrí do M). Overme to aj pre súčin: ak $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, tak $(a + b\sqrt{5})(c + d\sqrt{5}) = (ac + 5bd) + (bc + ad)\sqrt{5}$. Pretože čísla $ac + 5bd$, $bc + ad$ sú racionálne, aj súčin patrí do M. Neutrálny prvok operácie $+$ je 0, neutrálny prvok operácie $\cdot$ je 1, 0 aj 1 sú prvky z množiny M. Komutatívnosť, asociatívnosť aj distributívne zákony sa prenesú z poľa reálnych čísel (pretože prvky z M sú reálne čísla a sčitujeme aj násobíme ich rovnako ako reálne čísla). Opačný prvok k prvku $a + b\sqrt{5}$ je $-a - b\sqrt{5}$.

Jediná problematická časť úlohy je zistiť, či $a + b\sqrt{5}$, má v M inverzný prvok, t.j. či $\frac{1}{a+b\sqrt{5}} \in M$. (Predpokladáme, že $a + b\sqrt{5} \neq 0$, čo znamená, že aspoň jedno z čísel a, b je nenulové.) Použijeme nasledovnú úpravu (odstránime odmocninu v menovateli):

$$\frac{1}{a+b\sqrt{5}} = \frac{1}{a+b\sqrt{5}} \cdot \frac{a-b\sqrt{5}}{a-b\sqrt{5}} = \frac{a-b\sqrt{5}}{a^2-5b^2} = \frac{a}{a^2-5b^2} - \frac{b}{a^2-5b^2}\sqrt{5}$$

Treba si uvedomiť, že v týchto úpravách sme nemali v menovateli nulu, pretože pre racionálne čísla nemôže platiť $a = b\sqrt{5}$. Keďže $\frac{a}{a^2-5b^2} \in \mathbb{Q}$, $\frac{b}{a^2-5b^2} \in \mathbb{Q}$, zistili sme, že $\frac{1}{a+b\sqrt{5}} \in M$.

e,f) Je pole.

g*) Nie je to pole. Postupujme sporom - predpokladajme, že F je pole. Potom $\sqrt[3]{25} \in F$, lebo je to inverzný prvok k $\frac{\sqrt[3]{5}}{5}$. Čiže existujú $a, b \in Q$ tak, že platí $\sqrt[3]{25} = a + b\sqrt[3]{5}$. Vynásobme túto rovnicu $\sqrt[3]{5}$ a upravujme:

$$5 = a\sqrt[3]{5} + b\sqrt[3]{25} = a\sqrt[3]{5} + b(a + b\sqrt[3]{5}) = (a + b^2)\sqrt[3]{5} + ab$$
$$5 - ab = (a + b^2)\sqrt[3]{5}$$

Na ľavej strane je racionálne číslo. Aby sme dostali racionálne číslo aj na pravej strane tejto rovnice, musí platiť $a + b^2 = 0$. Potom sa aj ľavá strana rovná nule, čiže $5 = ab$. Riešením týchto dvoch rovníc dostaneme, že $b = -\sqrt[3]{5}$, $a = -\sqrt[3]{25}$, čo nie sú racionálne čísla.

Úloha 3.3.5f): Poznámka k ostatným častiam úlohy: Väčšinu treba dokazovať matematickou indukciou. Pri niektorých je užitočné použiť niektorý zo vzťahov dokázaných v predchádzajúcich častiach úlohy.

Máme vlastne overiť, že $m \times (m \times a)^{-1}$ je inverzný prvok k a, teda potrebujeme zistiť, či platí $(m\times(m\times a)^{-1}).a = 1$. Z definície inverzného prvku vieme že platí $(m \times a).(m\times a)^{-1} = 1$. Podľa d) pre $n = 1$ a $b = (m\times a)^{-1}$ dostaneme, že $1 = (m\times a).(m\times a)^{-1} = m\times(a.(m\times a)^{-1}) = m \times ((m \times a)^{-1}.a)$. Opäť použitím d) (tentokrát v úlohe a vystupuje $(m \times a)^{-1}$, $n = 1$ a b nahradíme a-čkom) dostaneme $1 = (m \times (m \times a)^{-1}).a$, čo sme chceli dokázať.

Úloha 3.3.9: Operácia $+$ je vlastne sčítanie modulo 2 na $\mathbb{Z}_2$ (teda operácia $\oplus$), o $(\mathbb{Z}_2, \oplus)$ sme už dokázali, že je to grupa. $M \setminus \{1\}$ je jednoprvková množina, pre binárnu operáciu na jednoprvkovej množine sa vlastnosti grupy overia ľahko, pretože výsledok ľubovoľnej operácie musí byť vždy ten istý prvok 1.

Všimnime si, že operácia $\cdot$ je definovaná tak, že platí $a.b = a$ pre ľubovoľné dva prvky a, b. Z toho dostávame, že $(a + b).c = a + b$ aj $ac + bc = a + b$.

Z vlastností poľa neplatí distributívny zákon $a(b + c) = ab + ac$, napríklad pre $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ dostaneme $1.(0 + 0) = 1.0 = 1$ a $1.0 + 1.0 = 1 + 1 = 0$.

Vektorové priestory

Úloha 4.1.4: Označme množinu všetkých zobrazení z M do F ako V. Súčet a násobenie skalárom sme definovali tak, že pre každé $x \in F$ platí:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(c.f)(x) = c.f(x)$$

(i) $(V, +)$ je abelovská grupa. Asociatívnosť: Máme overiť, či $(f + g) + h = f + (g + h)$. Rovnosť zobrazení overujeme tak, že overíme, či sa v každom bode rovnajú ich funkčné hodnoty.
$((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x)$
$(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + g(x) + h(x)$
Komutatívnosť: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$.
Neutrálny prvok je konštatné zobrazenie, ktoré každému x priradí 0. $(0 + f(x) = f(x) + 0 = f(x))$
Opačný prvok ku f je zobrazenie určené predpisom $g(x) = -f(x)$.

(ii): $(c.(f + g))(x) = c.(f + g)(x) = c.(f(x) + g(x)) = cf(x) + cg(x)$, $(c.f + c.g)(x) = (c.f)(x) + (c.g)(x) = c.f(x) + c.g(x)$. Aj (iii), (iv), (v) by sa overili rovnakým spôsobom.

Úloha 4.1.6: Sčítanie a násobenie v $\mathbb{Z}_2$ budeme v tomto príklade označovať len $+$ a $\cdot$, nie $\oplus$ a $\odot$ ako doteraz (kvôli stručnosti a prehľaddnosti).

(i) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ je abelovská grupa: komutatívnosť a asociatívnosť je zrejmá, neutrálny prvok je $\vec{0} = (0,0)$, inverzný prvok ku $\vec{\alpha} = (a_1, a_2)$ je $-\vec{\alpha} = (-a_1, -a_2)$.

Všimnime si, že pre násobenie skalárom ľubovoľného vektora $\vec{\alpha}$ zo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ v tomto prípade platí $0.\vec{\alpha} = \vec{0}$, $1.\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$. (Iné skaláry ako 0 a 1 v poli $\mathbb{Z}_2$ nie sú.) Ďalej využijeme to, že v $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ pre každý vektor platí $\vec{\alpha} + \vec{\alpha} = \vec{0}$. (Platí to preto, že $(a_1, a_2) + (a_1, a_2) = (a_1 + a_1, a_2 + a_2) = (0,0)$.)

(ii) Ak $c = 0$, na oboch stranách rovnosti dostaneme $\vec{0}$. Pre $c = 1$ je $1.(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \vec{\alpha} + \vec{\beta} = 1.\vec{\alpha} + 1.\vec{\beta}$.

(iii) Môžu nastať tieto možnosti:
$c = c' = 0$: $(c + c')\vec{\alpha} = 0\vec{\alpha} = \vec{0}$, $c\vec{\alpha} + c'\vec{\alpha} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$
$c = c' = 1$: $(c + c')\vec{\alpha} = (1+1)\vec{\alpha} = 0\vec{\alpha} = \vec{0}$, $c\vec{\alpha} + c'\vec{\alpha} = 1\vec{\alpha} + 1\vec{\alpha} = \vec{\alpha} + \vec{\alpha} = \vec{0}$
$c = 0$, $c' = 1$: $(c + c')\vec{\alpha} = 1\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$, $c\vec{\alpha} + c'\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$
$c = 1$, $c' = 0$: Vďaka komutatívnosti je tento prípade vlastne rovnaký, ako predchádzajúci.

(iv) Ak niektorý zo skalárov c a c' je 0, na oboch stranách vyjde $\vec{0}$. Ak $c = c' = 1$, dostaneme $(1.1)\vec{\alpha} = 1.\vec{\alpha} = 1.(1.\vec{\alpha})$.

Podpriestory

Úloha 4.2.3: Na základe kritéria vektorového podpriestoru sa ľahko overí, že v prípadoch b), e), f), i) a j) ide o vektorové podpriestory. Ostatné prípady nie sú vektorové podpriestory:
a) $(1,1,1) \in M$, ale $\frac{1}{2}(1,1,1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \notin M$,
c) $(0,1,0), (1,0,0) \in M$, ale $(0,1,0) + (1,0,0) = (1,1,0) \notin M$,
d) $(3,-2,0) \in M$, $2.(3,-2,0) = (6,-4,0) \notin M$,
g) $(1,1,0), (1,-1,0) \in M$, ale $(1,1,0) + (1,-1,0) = (2,0,0) \notin M$,
h) $(1,1,1) \in M$, $(-1).(1,1,1) = (-1,-1,-1) \notin M$,

Úloha 4.2.5: Budeme využívať to, že dva polynómy $p(x) = a_1 + a_2x + \ldots + a_nx^n$ a $q(x) = b_1 + b_2x + \ldots + b_mx^m$ ($a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$) sa rovnajú práve vtedy, keď majú rovnaký stupeň (t.j. $m = n$) a súčasne majú rovnaké koeficienty (pre každé $i = 1, \ldots, n$ platí $a_i = b_i$.)

Keďže ide o podmnožiny priestoru všetkých reálnych funkcií, stačí overiť, či platí kritérium vektorového podpriestoru.

a) Nech $p(x) = a_1 + a_2x + \ldots + a_kx^k$ a $q(x) = b_1 + b_2x + \ldots + b_mx^m$ sú ľubovoľné dva polynómy. Predpokladajme, že $m \leq k$. Potom aj $cp(x) + dq(x) = (ca_1 + db_1) + (ca_2 + db_2)x + \ldots + (ca_m + db_m)x^m + ca_{m+1}x^{m+1} + \ldots + ca_kx^k$ je polynóm. Zistili sme, že je to vektorový podpriestor.

b) Je to vektorový podpriestor. Stačí si všimnúť, že v predchádzajúcom odvodení, ak oba polynómy mali stupeň menší alebo rovný n (t.j. $k, m \leq n$), bol aj stupeň polynómu $cp(x) + dq(x)$ najviac n.

c) Nie je to vektorový podpriestor. Napríklad polynómy $p(x) = x^2 + x$ a $q(x) = x^2$ patria do tejto množiny, ale $p(x) - q(x) = x$ už do nej nepatrí.

d) Nie je to vektorový podpriestor. $p(x) = x^n + x$ a $q(x) = x^n$ sem patria, ale $p(x) - q(x)$ sem nepatrí.

Lineárna kombinácia a lineárna nezávislosť

Lineárna kombinácia a lineárny obal

Úloha 4.3.5c: Máme zistiť, či existujú čísla $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$ také, že $a(1,3,4) + b(2,1,3) + c(3,1,4) = (0,0,0)$. Dostaneme vlastne sústavu rovníc, treba si uvedomiť, že všetky násobenia a sčítanie v tejto sústave rovníc sa robia v poli $\mathbb{Z}_5$, inak ju riešime dosť podobne ako v $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
a + 2b + 3c &= 0 \\
3a + b + c &= 0 \quad /{+}2.\text{prvý riadok} \\
4a + 3b + 4c &= 0 \quad /{+}1.\text{prvý riadok} \\
\hline
a + 2b + 3c &= 0 \\
2c &= 0 \quad \Rightarrow c = 0 \text{ - dosadím do 1.riadku} \\
2c &= 0 \\
\hline
a + 2b &= 0 \\
a = -2b &= 3b
\end{aligned}$$

Riešením našej sústavy, je každá trojica tvaru $(3b, b, 0)$, kde $b \in \mathbb{Z}_5$, napríklad $a = 3$, $b = 1$, $c = 0$. Dané vektory sú lineárne závislé v $\mathbb{Z}_5^3$.

Úloha 4.3.6: a) $c_1(x+1) + c_2x^2 + c_3x^2 = c_1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^2$. Polynóm sa rovná nule práve vtedy, keď všetky jeho koeficienty sú nulové, čiže dostaneme, že $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Dané funkcie sú lineárne nezávislé.
b) Ak $c_1 + c_2(x+a) + c_3(x^2+bx+c) = c_3x^2 + (c_2 + c_3b)x + (c_1 + c_2a + c_3c) = 0$, tak $c_3 = 0$, $c_2 + 3.c_3 = c_2 + 3.0 = c_2 = 0$, $c_1 + c_2a + c_3c = c_1 = 0$. Zistili sme, že dané funkcie sú lineárne nezávislé.
c*) $\cos x = \cos\left(2.\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$, čiže $1 + \cos x - 2\cos^2\frac{x}{2} = 0$. Zistili sme, že tieto funkcie sú lineárne závislé.
d) Ak platí, že $c_1x + c_2x(x-1) + c_3x(x-1)(x-2)$ je nulová funkcia, tak po dosadení ľubovoľného čísla za x musí byť výsledok nulový. Skúsme dosadiť $x = 1, 2, 3$. Dostaneme $c_1 = 0$, $c_1 + 2c_2 = 0$, $3c_1 + 6c_2 + 6c_3 = 0$. Z druhej rovnice máme, že $c_2 = -\frac{c_1}{2} = 0$. Z tretej rovnosti vyjde po úprave, že $c_3 = -c_2 - \frac{c_1}{2} = 0$. Zistili sme, že zadané funkcie sú lineárne nezávislé.

Iný spôsob riešenia: každý polynóm roznásobiť a použiť cvičenie b).

e) Označme $f(x) = 1$, $g(x) = \cos x$ a $h(x) = \cos 2x$. Ak by pre nejaké reálne čísla c_1, c_2, c_3 platilo $c_1f + c_2g + c_3h = 0$, tak by muselo pre každé reálne číslo x platiť $c_1f(x) + c_2g(x) + c_3h(x) = 0$. Keď za x dosadíme postupne hodnoty 0, $\frac{\pi}{2}$ a π, dostaneme trojice hodnôt $(f(x), g(x), h(x))$ po rade $\vec{\alpha}_1 = (1,1,1)$, $\vec{\alpha}_2 = (1,0,-1)$ a $\vec{\alpha}_3 = (1,-1,1)$. Ak by funkcie f, g, h boli lineárne závislé, tak by boli lineárne závislé aj tieto vektory. Ľahko však overíme, že vektory $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ sú lineárne nezávislé.

Báza a dimenzia

Úloha 4.4.6: Stačí vhodne vybrať niektoré vektory zo štandardnej bázy (v prípade priestoru F_n) alebo z bázy $1, x, \ldots, x^n$ (pre polynómy), tak aby spolu s danými vektormi tvorili lineárne nezávislý systém vektorov.

a) (1,1,2), (2,3,1), (1,0,0) sú lineárne nezávislé - stačí to overiť pomocou sústavy rovníc.

b) Polynómy x^2-1, x^2+1, x, x^3 sú lineárne nezávislé. Z predpokladu $a(x^2-1)+b(x^2+1)+cx+dx^3=(a-b)+cx+(a+b)x^2+dx^3$ dostaneme sústavu rovníc $a-b=0$, $a+b=0$, $c=0$, $d=0$, ktorá má jediné riešenie $a=b=c=d=0$.

c) Napríklad (1,2,3,0), (3,4,1,2), (1,0,0,0), (0,1,0,0) sú lineárne nezávislé. Opäť sa to dá overiť riešením sústavy, neskôr sa to naučíme robiť jednoduchšie.

Lineárne a direktné súčty podpriestorov

Úloha 4.5.1d: Štandardným spôsobom (pomocou riadkových úprav matice zostavenej z daných vektorov) nájdeme bázy $U=[(1,1,1,1),(0,1,2,3)]$ a $V=[(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,1)]$. Pri hľadaní bázy $U+V$ vytvoríme maticu zo všetkých vektorov patriacich do týchto 2 báz a zistíme, že $U+V=\mathbb{R}^4=[(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$. Tým sme našli aj dimenzie priestorov U, V a $U+V$. Podľa vzorca $d(U)+d(V)=d(U+V)+d(U\cap V)$ vidíme, že $d(U\cap V)=1$.

V tomto prípade sa dá uhádnuť, že vektor, ktorý patrí do oboch priestorov je $(1,1,1,1,)=(1,1,0,0)+(0,0,1,1)$. Výpočtom to zistíme tak, že hľadáme vektory, ktoré sa dajú vyjadriť ako lineárna kombinácia vektorov z bázy U a súčasne ako lineárna kombinácia vektorov z bázy priestoru V. Teda by sme chceli aby platilo $a(1,1,1,1)+b(0,1,2,3)=c(1,0,0,0)+d(0,1,0,0)+e(0,0,1,1)$, čo je ekvivalentné so sústavou rovníc $c-a=0$, $d-a-b=0$, $e-a-2b=0$, $e-a-3b=0$. Riešením sústavy dostaneme $a=c=d=e$, $b=0$. Ak zvolíme za $d=1$, tak hľadaný vektor je $1.(1,1,1,1)+0.(0,1,2,3)=(1,1,1,1)$ Preto $U\cap V=[(1,1,1,1)]$.

Lineárne zobrazenia a matice

Riadková ekvivalencia a hodnosť matice

Úloha 5.2.7: Rada: Pri práci so zlomkami sa ľahšie pomýlim, ako keď tam mám len celé čísla. Preto, keď sa dá vybrať z viacerých možností, ako postupovať v ďalších úpravách, snažím sa vybrať si takú, kde nebudú zlomky, resp. ak nakoniec budem musieť použiť zlomky, snažím sa ich dostať čo najneskôr.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{(5)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{(6)}{\sim}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(7)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(8)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(9)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) `3.r+=2.r` (Týmto zápisom sa myslí to, že k tretiemu riadku sa pripočíta druhý) (2) `3.r*=1/5` (3) `1.r↔2.r` (4) `1.r-=3.r` (5) `2.r-=1.r`, `3.r-=1.r` (6) `2.r*=-1` `3.r*=-1` (7) 2.r-=2*3.r (8) `2.r*=`$\frac{1}{3}$ (9) `1.r-=2.r`

Hodnosť matice je 3.

Úloha 5.2.8: Rada: Parametre mi spôsobujú problémy $\Rightarrow$ čím viac z nich sa viem nejako šikovne zbaviť, tým lepšie. Ak delím výrazom obsahujúcim parameter, musím zvlášť rozobrať prípad, keď sa tento výraz rovná nule.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & c & -1 & 2 \\ 0 & -1-2c & 2+c & 1 \\ 0 & 10-c & -5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & c & -1 & 2 \\ 0 & -1-2c & 2+c & 1 \\ 0 & 9-3c & c-3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & c & -1 & 2 \\ 0 & -1-2c & 2+c & 1 \\ 0 & -3(3-c) & c-3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ak $c=3$, tak je posledný riadok nulový. Prvé dva riadky sú zrejme lineárne nezávislé, čiže hodnosť je v tom to prípade 2.

Ak $c\neq 3$, môžeme predeliť posledný riadok $c-3$. Dostaneme 3 lineárne nezávislé riadky a $h(A)$ je v tomto prípade 3.

Úloha 5.2.1b: Aj nejaký príklad nad $\mathbb{Z}_5$.
$\begin{pmatrix} 2&3&4&1\\ 3&2&3&2\\ 1&4&0&0\\ 4&1&2&3 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1&4&0&0\\ 2&3&4&1\\ 3&2&3&2\\ 4&1&2&3 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1&4&0&0\\ 0&0&4&1\\ 0&0&3&2\\ 0&0&2&3 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1&4&0&0\\ 0&0&4&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$
(1) `1.r`$\leftrightarrow$`3.r` (2) `2.r+=3*1.r; 3.r+=2*1.r; 4.r+=1.r` (3) `3.r+=3*2.r; 4.r+=2*3.r`
Hodnosť matice je 2.

Lineárne zobrazenia

Jeden vzorový príklad na hľadanie matice lineárneho zobrazenia je vyriešený priamo v texte prednášky.

Súčin matíc

Úloha 5.4.1: a) Nech $A = ||a_{ij}||$, $B = ||b_{ij}||$, $A^T = ||a'_{ij}||$, $B^T = ||b'_{ij}||$ a $AB = ||c_{ij}||$. Ak označíme $L := (A.B)^T$ a $P := B^T A^T$, tak $L_{ij} = c_{ji} = \sum_{t=1}^{k} a_{jt}b_{ti} = \sum_{t=1}^{k} b'_{it}a'_{tj} = P_{ij}$.
b) Pomocou predchádzajúcej časti matematickou indukciou ľahko ukážeme, že ak $A = A^T$, tak aj $A^n = (A^n)^T$.

Inverzná matica

Úloha 5.5.1a: Zobrazenie dané pôvodnou maticou zobrazí vektory zo štandardnej bázy na riadky matice. My hľadáme zobrazenie, ktoré naopak zobrazuje vektory určené riadkami matice na vektory zo štandardnej bázy. To znamená, že vpravo napíšeme jednotkovú maticu, vľavo danú a upravujeme podobne kým nedostaneme jednotkovú maticu vľavo.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&3&1&1&0&0\\ 4&3&3&0&1&0\\ 1&2&1&0&0&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&3&1&1&0&0\\ 0&-3&1&-2&1&0\\ 1&2&1&0&0&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&1&0&0&1\\ 0&-3&1&-2&1&0\\ 0&-1&-1&1&0&-2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&1&0&0&1\\ 0&1&1&-1&0&2\\ 0&0&4&-5&1&6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\\ 0&1&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\ 0&0&1&-\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{2} \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{2}\\ 0&1&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\ 0&0&1&-\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Skúšku správnosti môžeme urobiť vynásobením matíc. Pri hľadaní chyby môžeme postupovať kontrolovaním jednotlivých úprav alebo podobne ako pri matici zobrazenia s tým rozdielom, že teraz kontrolujeme, či sa vektor vpravo zobrazí pomocou danej matice na vektor naľavo od neho.

Sústavy lineárnych rovníc

V prednáškach nájdete 2 vyriešené príklady tohto typu.

Jadro a obraz lineárneho zobrazenia$^{\triangle}$

Úloha 5.8.1: Maticu A upravíme na RTM:
$\begin{pmatrix} 3&1&2&2\\ 4&3&2&1\\ 0&1&2&4\\ 2&0&1&2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2&0&1&2\\ 0&1&2&4\\ 3&1&2&2\\ 4&3&2&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&3&1\\ 0&1&2&4\\ 3&1&2&2\\ 4&3&2&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&3&1\\ 0&1&2&4\\ 0&1&3&4\\ 0&3&0&2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&3&1\\ 0&1&2&4\\ 0&0&1&0\\ 0&0&4&0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&1\\ 0&1&0&4\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$
Zistili sme, že báza obrazu je $(1,0,0,1), (0,1,0,4), (0,0,1,0)$. Tieto vektory nevygenerujú celé $(\mathbb{Z}_5)^3$, čiže zobrazenie určené touto maticou nie je surjektívne.

Keďže dimenzia obrazu je 3 a súčet dimenzie jadra a dimenzie obrazu má byť 4, dimenzia jadra musí byť 1. Teda $f^{-1}(0) \neq \{\vec{0}\}$ (vtedy by bola dimenzia 0) a zobrazenia f nie je prosté. Bázu jadra tohto zobrazenia by sme našli riešením homogénnej sústavy rovníc s maticou A^T - sústavy rovníc budeme riešiť na ďalšom cvičení. (Platí $\vec{\alpha}A = \vec{0} \Leftrightarrow A^T\vec{\alpha}^T = \vec{0}^T$, preto dostaneme sústavi s maticou A^T.)

Úloha 5.8.2: a) V tomto prípade vyjde jediné zobrazenie, vypočítame ho obvyklým spôsobom a potom zistíme, či je prosté (t.j. či $\mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{0}\}$).

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$

Musíme zvoliť vektory $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ tak, aby $(1,0,1), (0,1,0), \vec{\alpha}$ aj $(2,2,1), (1,0,3), \vec{\beta}$ boli lineárne nezávislé. (Lineárne zobrazenie je prosté práve vtedy, keď zobrazuje lineárne nezávislé vektory na lineárne nezávislé.) Zrejme môžeme zvoliť $\vec{\alpha} = (0,0,1)$. Vektor $\vec{\beta}$ nájdeme tak, že (2,2,1) a (1,0,3) doplníme na bázu. Tak zistíme, že môžeme zvoliť napríklad $\vec{\beta} = (0,1,0)$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Ak chceme overiť, či zobrazenie, ktoré sme dostali je skutočne prosté, môžeme vyrátať $\mathrm{Ker}\, f$. (V tomto prípade, keďže ide o štvorcovú maticu, môžeme sa tiež výpočtom determinantu presvedčiť, že je regulárna, čiže f je izomorfizmus a teda prosté zobrazenie - determinanty budeme preberať neskôr.)

c) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Vidíme, že 2 rôzne vektory (0,-1,2) a (0,1,2) sa zobrazia na ten istý vektor, čiže zobrazenie spĺňajúce podmienky zo zadania nemôže byť prosté. (K podobnému záveru by sme dospeli, keby nám vyšlo, že nenulový vektor sa zobrazí na $\vec{0}$, pretože by tento nenulový vektor patril do $\mathrm{Ker}\, f$.)

Determinanty

Úloha 6.5.9*:**

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

V kroku (1) sme použili Laplaceov rozvoj podľa prvého riadku, v kroku (2) podľa prvého stĺpca.

Dostali sme rekurentný vzťah $D_n = 2D_{n=1} - D_{n-2}$. Vypočítajme niekoľko prvých hodnôt (prvé dve priamym výpočtom, pri ostatných už môžeme použiť rekurenciu): $D_1 = 2, D_2 = 3, D_3 = 4, \dots$

Hypotézu, že $D_n = n+1$ ľahko dokážeme matematickou indukciou. Indukčný krok: $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2} = 2n - (n-1) = n+1$.

Úloha 6.5.10*:**

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} (a+b)D_{n-1} - 1 \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

Tentoraz sme robili najprv rozvoj podľa prvého stĺpca a potom podľa prvého riadku.

$D_n = (a+b)D_{n=1} - abD_{n-2}$. Opäť vyrátame niekoľko prvých hodnôt: $D_1 = a+b, D_2 = a^2 + ab + b^2, D_3 = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3, \dots$

Matematickou indukciou sa budeme snažiť dokázať, že $D_n = a^n + a^{n-1}b + \dots + b^n = \sum\limits_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$. Indukčný krok: $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2} = (a+b)\sum\limits_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k - ab\sum\limits_{k=0}^{n-2} a^{n-2-k}b^k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^{k+1} - \sum\limits_{k=0}^{n-2} a^{n-1-k}b^k + 1 = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k + b^n = \sum\limits_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$.

Úloha 6.5.11*:

$D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & \dots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \dots & 2n-1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & \dots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} = (2n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & \dots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (2n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & n-1 \end{vmatrix} =$ $\underline{\underline{(2n-1)(n-1)^{n-1}}}$ V kroku (1) sme k prvému riadku pripočítali všetky ostatné. V kroku (2) sme od ostatných riadkov odpočítali prvý riadok. Nakoniec sme dostali determinant matice, ktorá má pod diagonálou samé nuly. Tento determinant vyrátame ako súčin diagonálnych prvkov.