

Lineárne zobrazenia a matice

19. novembra 2012

Sústavy lineárnych rovníc

Definícia

Sústavou lineárnych rovníc rozumieme systém rovníc tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= c_m \end{aligned} \tag{1}$$

kde $a_{ij}, c_i \in F$ pre všetky prípustné hodnoty indexov i a j .
Riešenie sústavy lineárnych rovníc je n -tica (x_1, \dots, x_n) ktorá spĺňa všetky uvedené rovnice. Ak existuje aspoň jedno riešenie sústavy lineárnych rovníc, hovoríme, že táto sústava je *riešiteľná*. Skaláry c_1, \dots, c_n nazývame *pravé strany*, a_{ij} sú *koeficienty* a x_i sú neznáme.

Matica sústavy

Definícia

Maticu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazývame *matica sústavy* (1).

Maticu

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

nazývame *rozšírená matica sústavy* (1).

Maticový zápis sústavy

$$A\vec{x}^T = \vec{c}^T$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Sústavy a riadkové úpravy

Veta

Ak rozšírené matice dvoch sústav lineárnych rovníc sú riadkovo ekvivalentné, tak tieto dve sústavy majú rovnakú množinu riešení.

Homogénne sústavy lineárnych rovníc

homogénna sústava = pravé strany sú nulové

Veta

Množina všetkých riešení homogénnej sústavy lineárnych rovníc tvorí podpriestor priestoru F^n .

Homogénne sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned}x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + c_{1,r+2}x_{r+2} + \dots + c_{1,n}x_n &= 0 \\x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + c_{2,r+2}x_{r+2} + \dots + c_{2,n}x_n &= 0 \\&\dots \\x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + c_{r,r+2}x_{r+2} + \dots + c_{r,n}x_n &= 0\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_{r+1} &= (-c_{1,r+1}, -c_{2,r+1}, \dots, -c_{r,r+1}, 1, 0, \dots, 0), \\ \vec{\gamma}_{r+2} &= (-c_{1,r+2}, -c_{2,r+2}, \dots, -c_{r,r+2}, 0, 1, \dots, 0), \\ &\dots \\ \vec{\gamma}_n &= (-c_{1,n}, -c_{2,n}, \dots, -c_{r,n}, 0, \dots, 0, 1).\end{aligned}\tag{3}$$

Homogénne sústavy lineárnych rovníc

Veta

Vektory $\vec{\gamma}_{r+1}, \vec{\gamma}_{r+2}, \dots, \vec{\gamma}_n$ tvoria bázu priestoru riešení homogénnej sústavy (2).

Dôsledok

Nech A je matica typu $m \times n$ a S je priestor riešení homogénnej sústavy lineárnych rovníc s maticou A . Potom

$$d(S) = n - h(A).$$

Dôsledok

Homogénna sústava lineárnych rovníc s n neznámymi, ktorej matica má hodnosť n , má len triviálne riešenie.

Homogénne sústavy lineárnych rovníc

Príklad

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0.$

Príklad

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\{(t, 0, -t); t \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, -1)]$

Podpriestor riešení

Veta

Každý podpriestor priestoru F^n je množinou riešení nejakého homogénneho systému lineárnych rovníc.

Gaussova eliminačná metóda

Príklad

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = 4 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = -3 \\ x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & = 1 \\ & -7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$x_4 = t \Rightarrow x_1 = -8, x_2 = t + 3, x_3 = 2t + 6.$$

Množina všetkých riešení: $\{(-8, 3 + t, 6 + 2t, t); t \in \mathbb{R}\}$.

Frobeniova veta

Veta

Pre každú maticu A nad poľom F platí $h(A) = h(A^T)$.

$$A = (\vec{\alpha}_1 \dots \vec{\alpha}_n)$$

$$A\vec{x}^T = \vec{0}^T \Leftrightarrow x_1\vec{\alpha}_1 + \dots + x_n\vec{\alpha}_n = \vec{0}$$

Veta (Frobeniova)

Nehomogénna sústava lineárnych rovníc (1) je riešiteľná práve vtedy, keď matica sústavy a rozšírená matica sústavy majú rovnakú hodnotu, t.j.

$$h(A) = h(A').$$

Riešenia homogénnej a nehomogénnej sústavy

Veta

Nech $\vec{\alpha}$ je riešenie sústavy lineárnych rovníc

$$A \cdot \vec{\alpha}^T = \vec{\gamma}^T \quad (N)$$

a S je podpriestor pozostávajúci zo všetkých riešení homogénneho systému

$$A \cdot \vec{\alpha}^T = \vec{0}^T. \quad (H)$$

Potom $T = \{\vec{\alpha} + \vec{\beta}; \vec{\beta} \in S\}$ je množina všetkých riešení (N).

Definícia

Definícia

Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie. Potom *jadrom lineárneho zobrazenia* f nazývame množinu

$$\text{Ker } f = \{\vec{\alpha} \in V; f(\vec{\alpha}) = \vec{0}\}$$

a *obrazom lineárneho zobrazenia* f nazývame množinu

$$\text{Im } f = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in V\}.$$

Jadro a obraz

Tvrdenie

Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie. Potom $\text{Ker } f$ je vektorový podpriestor priestoru V a $\text{Im } f$ je vektorový podpriestor priestoru W .

$$V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n] \Rightarrow \text{Im } f = [f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)]$$

Tvrdenie

Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie.

Zobrazenie f je injektívne práve vtedy, keď $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$.

Jadro a obraz

Tvrdenie

Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie.

Zobrazenie f je surjektívne práve vtedy, keď $\text{Im } f = W$.

Dôsledok

Lineárne zobrazenie $f: V \rightarrow W$ je izomorfizmus práve vtedy, keď $\text{Im } f = W$ a $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$.

Dimenzia

Veta

Nech V a W sú konečnorozmerné vektorové priestory a $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie. Potom

$$d(V) = d(\text{Ker } f) + d(\text{Im } f).$$