

Axiomatický přístup k teorii množin

21. septembra 2014

Georg Cantor

Georg Cantor - zakladateľ teórie množín

1874 - dôkaz o existencii transcendentných čísel

Nepoužíval axiomatický prístup – tzv. naivná teória množín.

Množina = súhrn objektov určených nejakou vlastnosťou.

Russellov paradox

Spomedzi všetkých množín vyberieme tie množiny, ktoré nie sú prvkom samej seba.

$$A = \{x; x \notin x\}$$

Ak $A \in A$, tak $A \notin A$ – spor.

Ak $A \notin A$, tak $A \in A$ – spor.

Berryho paradox

$B = \{n; n \text{ je prirodzené číslo, ktoré sa dá definovať najviac 20 slovami slovenského jazyka}\}$

Zoberieme najmenšie n , ktoré nepatrí do B :

$n =$ je najmenšie prirodzené číslo, ktoré sa nedá popísať najviac 20 slovami slovenského jazyka

Máme $n \in B$ aj $n \notin B$.

Hilbertov program

Ciele: Pomocou axiomatického prístupu

- ▶ odstrániť známe paradoxy;
- ▶ dokázať bezospornosť teórie množín;
- ▶ v rámci tejto teórie sformalizovať celú matematiku.

Jazyk teórie množín

- ▶ Ak x, y sú množinové premenné, tak $(x = y)$ a $(x \in y)$ sú formuly teórie množín. (Tieto dva typy formúl nazývame *atomické formuly*.)
- ▶ Ak φ, ψ sú formuly teórie množín, tak aj zápisy $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi$ a $\varphi \Leftrightarrow \psi$ sú formuly teórie množín.
- ▶ Ak x je množinová premenná a φ je formula teórie množín, tak $((\exists x)\varphi)$ a $((\forall x)\varphi)$ sú tiež formuly teórie množín.

Za *formuly teórie množín* považujeme len atomické formuly a formuly, ktoré z nich vieme získať použitím konečného počtu uvedených pravidiel.

Jazyk teórie množín

Príklady formúl:

$$(x \in y) \wedge (\forall z)(z \in y \Rightarrow z \in x)$$

$$(\forall x)(x \in y \Rightarrow x \in z)$$

$$(x = y) \wedge (y = z) \Rightarrow (x = z)$$

Ďalšie príklady – o chvíľu.

Axiómy systému ZFC

Axióma I (Axióma extenzionality)

$$(\forall x)(\forall y)[(x = y) \Leftrightarrow (\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)]$$

Dve množiny sa rovnajú práve vtedy, keď obsahujú rovnaké prvky.

Axióma IV (Axióma existencie)

$$(\exists x)(x = x)$$

Existuje aspoň jedna množina.

Axiómy systému ZFC

Axióma II (Axióma zjednotenia množín)

$$(\forall A)(\exists U)(\forall z)(z \in U \Leftrightarrow (\exists a \in A)(z \in a))$$

Pre ľubovoľnú množinu A existuje taká množina U , ktorá obsahuje práve tie prvky, ktoré patria do niektorej z množín patriacich do A .

Axióma III (Axióma dvojice)

$$(\forall a)(\forall b)(\exists C)(\forall z)[z \in C \Leftrightarrow (z = a) \vee (z = b)]$$

Ak a, b sú množiny, tak existuje množina ktorá obsahuje práve prvky a, b a žiadne iné. Túto množinu označíme $\{a, b\}$.

Axiómy systému ZFC

Tvrdenie

Pre ľubovoľné množiny A , B existuje taká množina C , do ktorej patria práve prvky patriace do množiny A alebo do množiny B . Túto množinu označujeme $A \cup B$ a nazývame zjednotenie množín A a B .

Tvrdenie

Pre každú množinu a existuje jediná množina A , ktorá obsahuje a ako jediný svoj prvok, t.j.

$$z \in A \Leftrightarrow z = a.$$

Túto množinu označujeme $\{a\}$.

Axiómy systému ZFC

Axióma V (Schéma axióm vymedzenia)

Nech $\varphi(x)$ je formula teórie množín, ktorá neobsahuje B ako voľnú premennú. Potom platí

$$(\forall A)(\exists B)(\forall z)(z \in B \Leftrightarrow z \in A \wedge \varphi(z))$$

Pre každú množinu A existuje množina B obsahujúca práve tie prvky z A , pre ktoré je pravdivý výrok $\varphi(z)$, ktorý dostaneme nahradením všetkých voľných výskytov premennej x premennou z . Túto množinu budeme označovať

$$B := \{x \in A; \varphi(x)\}.$$

Axiómy systému ZFC

Tvrdenie

Existuje (práve jedna) množina \emptyset s vlastnosťou

$$(\forall z)(z \notin \emptyset).$$

Túto množinu nazývame prázdna množina.

Axiómy systému ZFC

Tvrdenie

Pre ľubovoľné dve množiny A , B existuje práve jedna množina C , ktorá obsahuje práve tie prvky, ktoré patria súčasne do A aj do B . Túto množinu nazývame prienik množín A a B a označujeme ju $A \cap B$.

Definícia

Množiny A a B sa nazývajú *disjunktné*, ak $A \cap B = \emptyset$, t.j. ak majú prázdny prienik.

Axiómy systému ZFC

Definícia

Ak A , B sú množiny, tak hovoríme, že A je *podmnožinou* B , ak každý prvok množiny A je prvkom množiny B . Tento fakt označíme $A \subseteq B$.

$$A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall z)(z \in A \Rightarrow z \in B)$$

Axiómy systému ZFC

Axióma VI (Axióma potenčnej množiny)

$$(\forall A)(\exists P)(\forall z)(z \in P \Leftrightarrow z \subseteq A)$$

Pre každú množinu A existuje množina P pozostávajúca práve z podmnožín množiny A .

Definícia

Množinu všetkých podmnožín množiny A nazývame *potenčná množina* množiny A a označujeme $\mathcal{P}(A)$.

$$\mathcal{P}(A) = \{B; B \subseteq A\}$$

Axiómy systému ZFC

Axióma VIII (Schéma axióm substitúcie)

Nech $\varphi(x, y)$ je formula teórie množín, ktorá neobsahuje B ako voľnú premennú. Potom platí

$$(\forall A)[(\forall x \in A)(\exists! y)\varphi(x, y) \Rightarrow (\exists B)(\forall z)(z \in B \Leftrightarrow (\exists x \in A)\varphi(x, z))].$$

Trochu nepresne sa dá preformulovať tak, že ak A je množina a $f: A \rightarrow Y$ je zobrazenie na množine A , tak existuje množina $\{f(a); a \in A\}$, čiže obraz množiny A .

Axiómy systému ZFC

Axióma (Axióma regularity)

$$(\forall A)[(\exists B)(B \in A) \Rightarrow (\exists B \in A)\neg[(\exists c)(c \in A \wedge c \in B)]]$$

Každá neprázdna množina obsahuje množinu, ktorá je s ňou disjunktná.

$$(\forall A)[A \neq \emptyset \Rightarrow (\exists B \in A)B \cap A = \emptyset]$$

Z axiómy regularity sa dá odvodiť, že $(\forall x)x \notin x$.

Axiómy systému ZFC

Axióma X (Axióma nekonečné množiny)

$$(\exists A)[\emptyset \in A \wedge (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \cup \{x\} \in A)]$$

$$A_0 = \emptyset$$

$$A_1 = A_0 \cup \{A_0\} = \{\emptyset\}$$

$$A_2 = A_1 \cup \{A_1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$A_3 = A_2 \cup \{A_2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

⋮

Axiómy systému ZFC

Doteraz uvedené axiómy sa zvyknú označovať ako axiomatický systém ZF. Po pridaní nasledujúcej axiómy už dostaneme celý systém ZFC.

Axióma VIII (Axióma výberu)

$$(\forall \mathcal{S})[(\forall A \in \mathcal{S})(A \neq \emptyset) \wedge (\forall A \in \mathcal{S})(\forall B \in \mathcal{S})(A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset) \Rightarrow (\exists V)(\forall A \in \mathcal{S})(\exists x)(V \cap A = \{x\})]$$

Ak \mathcal{S} je systém neprázdnych disjunktných množín, tak existuje množina V , ktorá má s každou z týchto množín jednoprvkový prienik.

Axiómy systému ZFC

Axiómu výberu môžeme ekvivalentne preformulovať takto:

Axióma VIII

Ak \mathcal{S} je systém neprázdnych disjunktných množín, tak existuje zobrazenie $f: \mathcal{S} \rightarrow \bigcup \mathcal{S}$ také, že pre každé $A \in \mathcal{S}$ platí $f(A) \in A$.

Dokonca platí, že axióma výberu je ekvivalentná s tvrdením, ktoré dostaneme, ak v predchádzajúcej formulácii vynecháme podmienku disjunktnosti.

Definície

$$A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall z)(z \in A \Rightarrow z \in B)$$

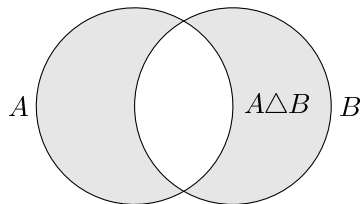
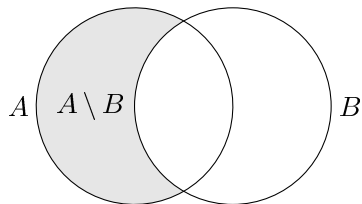
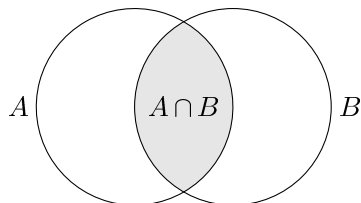
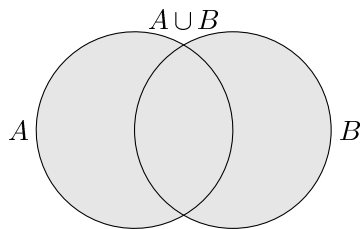
$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Vennove diagramy



Vlastnosti inklúzie

Tvrdenie

Nech A, B, C sú ľubovoľné množiny. Potom platí:

- ▶ *Pre každú množinu platí $A \subseteq A$.*
- ▶ *$A = B$ práve vtedy, keď $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.*
- ▶ *Ak platí $A \subseteq B$ a $B \subseteq C$, tak $A \subseteq C$.*

Identity pre \cup a \cap

Tvrdenie

Nech A, B, C sú množiny. Potom platí:

- (i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(asociatívnosť operácií \cup a \cap);
- (ii) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (komutatívnosť operácií \cup a \cap);
- (iii) $\emptyset \cup A = A$, $\emptyset \cap A = \emptyset$;
- (iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributívnosť);
- (v) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$ (idempotentosť operácií \cup a \cap);
- (vi) $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$ (zákony absorpcie).

Zjednotenie a prienik systému množín

$$\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A := \{z; (\exists A \in \mathcal{S}) z \in A\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{z; (\exists i \in I) z \in A_i\}$$

$$\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A := \{z; (\forall A \in \mathcal{S}) z \in A\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{z; (\forall i \in I) z \in A_i\}$$

$\bigcap \mathcal{S}$ definujeme len pre $\mathcal{S} \neq \emptyset$

Zjednotenie a prienik systému množín

Tvrdenie

Nech S a B sú ľubovoľné množiny. Potom platí:

$$B \cap \bigcup_{A \in S} A = \bigcup_{A \in S} (B \cap A);$$

$$B \cup \bigcap_{A \in S} A = \bigcap_{A \in S} (B \cup A).$$

Inklúzia, prienik a zjednotenie

Tvrdenie

Nech A a B sú množiny. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) $A \subseteq B$;
- (ii) $A = A \cap B$;
- (iii) $B = A \cup B$.

Tvrdenie

Nech A , B , C sú množiny. Potom platí:

- (i) $\emptyset \subseteq A$;
- (ii) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$;
- (iii) Ak $A \subseteq B$, tak $A \cap C \subseteq B \cap C$ a $A \cup C \subseteq B \cup C$.

Identity pre množinový rozdiel

- (i) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C),$
 $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C);$
- (ii) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C;$
- (iii) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C);$
- (iv) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C),$
 $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C);$
- (v) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B);$
- (vi) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = A \cap (C \setminus B);$
- (vii) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \setminus C);$

Identity pre množinový rozdiel

$$(viii) \quad A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B);$$

$$(ix) \quad A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset.$$

$$(x) \quad A \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i), \quad A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i).$$

$$(xi) \quad \text{Ak } B \subseteq C, \text{ tak } A \setminus C \subseteq A \setminus B.$$

$$(xii) \quad \text{Ak } B \subseteq C, \text{ tak } B \setminus A \subseteq C \setminus A.$$

Identity pre symetrickú diferenciu

Tvrdenie

Nech A, B, C sú množiny. Potom platí:

- (i) $A\Delta B = B\Delta A$;
- (ii) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$;
- (iii) $A\Delta A = \emptyset$, $A\Delta\emptyset = A$;
- (iv) $A\cup B = A\Delta B\Delta(A\cap B)$;
- (v) $A\setminus B = A\Delta(A\cap B)$.

Usporiadaná dvojica

Definícia

Nech a, b sú množiny. Potom množinu

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

nazývame *usporiadanou dvojicou* množín a a b .

Tvrdenie

Nech a, b, c, d sú množiny. Potom

$$(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \wedge b = d.$$

Karteziánsky súčin

Definícia

Karteziánsky súčin množín A a B je množina, ktorej prvkami sú práve také usporiadané dvojice, kde prvý prvok patrí do množiny a a druhý prvok patrí do množiny b . Túto množinu označujeme

$$A \times B := \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

Karteziánsky súčin

Tvrdenie

Nech A, B, C sú množiny. Potom platí

- (i) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$;
- (ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
- (iii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
- (iv) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
- (v) *Ak navyše $A, B, C, D \neq \emptyset$, tak platí*

$$A \times B = C \times D \Leftrightarrow A = C \wedge B = D$$

Karteziánsky súčin vo všeobecnosti nie je asociatívny ani komutatívny:

$$A \times B \neq B \times A$$

$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$$