Dobre usporiadané množiny

16. septembra 2014

Dobre usporiadané množiny

Definícia

Nech $(A, \leq)$ je čiastočne usporiadaná množina. Hovoríme, že $(A, \leq)$ je *dobre usporiadaná množina*, resp. že $\leq$ je *dobré usporiadanie* na množine A, ak každá neprázdna podmnožina množiny A má najmenší prvok v usporiadaní $\leq$.

Definícia

Ak $(A, \leq)$ je lineárne usporiadaná množina, tak symbolom A_a budeme označovať množinu všetkých prvkov menších než A.

$$A_a = \{x \in A; x < a\}$$

Indukcia v dobre usporiadanej množine

Veta (Indukcia v dobre usporiadanej množine)

Nech $(A, \leq)$ je dobre usporiadaná množina. Nech podmnožina $B \subseteq A$ má nasledujúcu vlastnosť:

$$(\forall a \in A) A_a \subseteq B \Rightarrow a \in B.$$

Potom $B = A$.

Príklady dobre usporiadaných množín: $(\mathbb{N}, \leq)$ (a jej podmnožiny)

Lexikografické a antilexikografické usporiadanie

Definícia

Nech $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ sú čiastočne usporiadané množiny. Potom reláciu $\leq$ na množine $A \times B$ definovanú ako

$$(a, b) \leq (a', b') \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad (a <_A a') \vee [(a = a') \wedge (b \leq_B b')]$$

nazývame *lexikografické usporiadanie.* Tiež hovoríme, že $(A \times B, \leq)$ je *lexikografický súčin* čiastočne usporiadaných množín $(A, \leq_A)$ a $(B, \leq_B)$.

Antilexikografické usporiadanie na $A \times B$ definujeme ako

$$(a, b) \leq (a', b') \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad (b <_B b') \vee [(b = b') \wedge (a \leq_B a')].$$

Lexikografické a antilexikografické usporiadanie

Tvrdenie

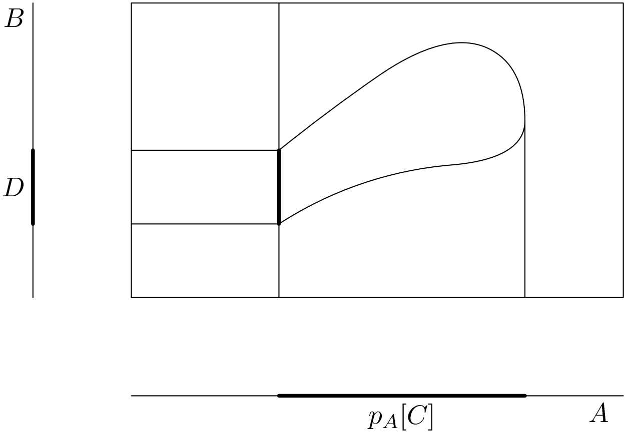
Nech $(A, \leq)$, $(B, \leq)$ *sú čiastočne usporiadané množiny a* $(A \times B, \leq)$ *je ich (anti)lexikografický súčin. Potom*

(i) $(A \times B, \leq)$ *je čiastočne usporiadaná množina;*

(ii) *ak* $(A, \leq)$ *a* $(B, \leq)$ *sú lineárne usporiadané, tak aj* $(A \times B, \leq)$ *je lineárne usporiadaná množina;*

(iii) *ak* $(A, \leq)$ *a* $(B, \leq)$ *sú dobre usporiadané, tak aj* $(A \times B, \leq)$ *je dobre usporiadaná množina.*

Lexikografické a antilexikografické usporiadanie



Súčet dobre usporiadaných množín

Príklad

Nech $(B, \leq_B)$ a $(C, \leq_C)$ sú čiastočne usporiadané množiny. Na $M := \{0\} \times B \cup \{1\} \times C$ zadefinujeme $\leq$ ako:
$(0, b) \leq (1, c)$ pre ľubovoľné $b \in B$, $c \in C$;
pre $b, b' \in B$ platí $(0, b) \leq (0, b')$ práve vtedy, keď $b \leq_B b'$;
pre $c, c' \in C$ platí $(0, c) \leq (0, c')$ práve vtedy, keď $c \leq_C c'$.
Dostaneme čiastočné usporiadanie. Ak obe množiny sú lineárne (dobre) usporiadané, platí to aj o výslednej množine.
Označenie: $(B, \leq_B) + (C, \leq_C)$ alebo $B + C$
$\{0\} + \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$
$\mathbb{N} + \{0\} \not\cong \mathbb{N}$
Neskôr: súčet a súčin ordinálnych čísel.

Súčet dobre usporiadaných množín

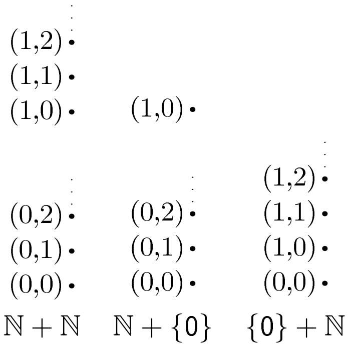


Figure: Príklady na súčet dobre usporiadaných množín

Počiatočný úsek

Definícia

Počiatočný úsek lineárne usporiadanej množiny $(X, \leq)$ je podmnožina $U \subseteq X$ s vlastnosťou $x \in U \wedge y \leq x \Rightarrow y \in U$.

X a množiny tvaru $X_a = \{x \in X; x < a\}$ pre $a \in X$

Tvrdenie

Nech $(X, \leq)$ je lineárne usporiadaná množina a nech $X' = \{X_a; a \in X\}$ je množina všetkých vlastných počiatočných úsekov množiny X. Potom zobrazenie $f: X \to X'$ určené predpisom

$$f(a) = X_a$$

je izomorfizmus $(X, \leq)$ a $(X', \subseteq)$.