

# *Prírodné čísla v ZFC*

26. novembra 2013

## *Peanove axiomy*

### *Definícia*

Nech  $N$  je množina,  $0$  je nejaký prvok  $N$  a  $S$  je zobrazenie definované na  $N$ . Hovoríme, že trojica  $(N, 0, S)$  spĺňa *Peanove axiomy*, ak platí:

(P1)  $0 \in N$ ;

(P2) Ak  $n \in N$ , tak aj  $S(n) \in N$ .

(P3) Ak  $n \in N$ , tak  $S(n) \neq 0$ .

(P4) Ak  $m, n \in N$  a  $S(m) = S(n)$ , tak  $m = n$ .

(P5) Ak  $A \subseteq N$  je podmnožina množiny  $N$  taká, že  $0 \in A$  a pre každé  $n \in A$  aj  $S(n) \in A$ , tak  $A = N$ .

## *Peanove axiomy*

### *Tvrdenie*

*Nech  $(N, 0, S)$  spĺňa Peanove axiomy. Potom pre každé  $a \in N$  nastane práve jedna z možností  $a = 0$  alebo  $a = S(n)$  pre nejaké  $n \in N$ .*

### *Tvrdenie*

*Nech  $(N, 0, S)$  spĺňa Peanove axiomy a  $X$  je ľubovoľná množina. Nech  $b \in X$  a nech  $g: N \times X \rightarrow X$  je funkcia. Potom existuje práve jedna funkcia  $f: N \rightarrow X$  taká, že  $f(0) = b$  a pre každé  $n \in N$  platí  $f(S(n)) = g(n, f(n))$ .*

## Definícia sčítovania

### *Tvrdenie*

*Nech  $(N, 0, S)$  spĺňa Peanove axiómy. Potom existuje práve jedna binárna operácia  $+$  na  $N$  taká, že pre ľubovoľné  $a, n \in N$  platí*

$$(A1) \quad a + 0 = a;$$

$$(A2) \quad a + S(n) = S(a + n).$$

## *Komutatívnosť sčítovania*

*Tvrdenie*

$$0 + a = a \quad (\text{K1})$$

$$S(0) + a = S(a) \quad (\text{K2})$$

$$a + S(b) = S(a) + b \quad (\text{K3})$$

$$a + b = b + a \quad (\text{K})$$

## *Vlastnosti sčítovania*

### *Tvrdenie*

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (\text{A})$$

$$b + a = c + a \Rightarrow b = c \quad (\text{C})$$

### *Lema*

$$a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \wedge b = 0$$

## *Definícia nerovnosti*

### *Definícia*

$$a \leq b \Leftrightarrow (\exists c \in \mathbb{N}) b = a + c. \quad (I)$$

## *Vlastnosti nerovnosti*

$$a \leq a \quad (\text{IR})$$

$$a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b \quad (\text{IA})$$

$$a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c \quad (\text{IT})$$

$$0 \leq a \quad (1)$$

$$a \leq 0 \Rightarrow a = 0 \quad (2)$$

$$a \leq S(a) \quad (3)$$

$$a \leq b \Leftrightarrow S(a) \leq S(b) \quad (4)$$

$$a \leq S(b) \Rightarrow a \leq b \vee a = S(b) \quad (5)$$

$$a \leq b \vee S(b) \leq a \quad (6)$$

$$a \leq b \vee b \leq a \quad (\text{IL})$$



## Vlastnosti nerovnosti

### *Dôsledok*

*Množina  $(N, \leq)$  je lineárne usporiadaná množina.*

### *Tvrdenie*

*Množina  $(N, \leq)$  je dobre usporiadaná.*

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad c + a \leq c + b \quad (\text{M})$$

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad c + a < c + b \quad (\text{M}')$$

## *Vlastnosti nerovnosti*

### *Dôsledok*

$$a_1 \leq a_2 \wedge b_1 \leq b_2 \Rightarrow a_1 + b_1 \leq a_2 + b_2.$$

### *Dôsledok*

$$a_1 < a_2 \wedge b_1 \leq b_2 \Rightarrow a_1 + b_1 < a_2 + b_2.$$

## Definícia násobenia

### *Tvrdenie*

*Nech  $(N, 0, S)$  spĺňa Peanove axiómy. Potom existuje práve jedna binárna operácia  $\cdot$  na  $N$  taká, že pre ľubovoľné  $a, b \in N$  platí*

$$(M1) \quad a \cdot 0 = 0;$$

$$(M2) \quad a \cdot S(b) = a \cdot b + a.$$

## *Komutatívnosť a asociatívnosť*

### *Tvrdenie*

- (i)  $a \cdot S(0) = a$
- (ii)  $0 \cdot a = 0$
- (iii)  $S(b) \cdot a = b \cdot a + a$
- (iv)  $a \cdot b = b \cdot a$

### *Tvrdenie*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (\text{D})$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad (\text{MA})$$

## Násobenie a nerovnosť

*Tvrdenie*

$$a \leq b \quad \Rightarrow \quad c \cdot a \leq c \cdot b \quad (7)$$

*Tvrdenie*

$$c \neq 0 \wedge a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b \quad (8)$$

$$c \neq 0 \wedge a < b \quad \Rightarrow \quad c \cdot a < c \cdot b \quad (9)$$

$$c \neq 0 \wedge c \cdot a < c \cdot b \quad \Rightarrow \quad a < b \quad (10)$$

$$c \neq 0 \wedge c \cdot a \leq c \cdot b \quad \Rightarrow \quad a \leq b \quad (11)$$