

Konečné množiny

16. decembra 2013

Dedekindova definícia

Definícia

Množinu X budeme nazývať *D-nekonečná*, ak existuje vlastná podmnožina $Y \subsetneq X$ taká, že $|Y| = |X|$. Ak množina X nie je *D-nekonečná*, voláme ju *D-konečná*.

Príklad: \mathbb{N}

Dedekindova definícia

Tvrdenie (ZF)

Nech X je ľubovoľná množina. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) X je D -nekonečná;
- (ii) $\aleph_0 \leq |X|$;
- (iii) $|X| = |X| + 1$.

Tarskiho definícia

Definícia

Hovoríme, že množina X je T -konečná, ak každá neprázdna množina \mathcal{A} podmnožín množiny X má minimálny prvok vzhľadom na inklúziu.

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \wedge \mathcal{A} \neq \emptyset \Rightarrow (\exists A \in \mathcal{A})(B \in \mathcal{A} \wedge B \subseteq A \Rightarrow B = A)$$

Ak X nie je T -konečná, budeme ju volať T -nekonečná.

Ak nahradíme v uvedenej definícii slovo „minimálny“ slovom „maximálny“, dostaneme ekvivalentnú definíciu.

Príklad: \mathbb{N}

Tarskiho definícia

Lema (ZF)

- (i) *Množina \emptyset je T -konečná.*
- (ii) *Ak X je T -konečná množina a x je ľubovoľná množina, tak aj $X \cup \{x\}$ je T -konečná.*

Tvrdenie (ZF)

Nech X je ľubovoľná množina. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) *X je T -konečná;*
- (ii) *ak množina $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ spĺňa podmienky*
$$\emptyset \in \mathcal{A};$$
$$A \in \mathcal{A}, x \in X \Rightarrow A \cup \{x\} \in \mathcal{A},$$
tak $X \in \mathcal{A}$.

Podmnožina, zjednotenie

Tvrdenie (ZF)

Ak X je T -konečná množina a $Y \subseteq X$, tak aj Y je T -konečná.

Tvrdenie (ZF)

Ak X a Y sú T -konečné množiny, tak aj $X \cup Y$ je T -konečná.

Tvrdenie (ZF)

Ak \mathcal{S} je T -konečný systém T -konečných množín, tak aj množina $\bigcup \mathcal{S}$ je T -konečná.

Obraz

Tvrdenie (ZF)

Obraz T -konečnej množiny je T -konečná množina, t.j. ak X je T -konečná a $f: X \rightarrow Y$ je surjekcia, tak Y je T -konečná.

Dôsledok (ZF)

Ak X je T -konečná množina a $|X| = |Y|$, tak Y je T -konečná.

Dôsledok (ZF)

Ak Y je T -konečná množina a $|X| \leq |Y|$, tak X je T -konečná.

Potenčná množina

Tvrdenie (ZF)

Ak množina X je T -konečná, tak je T -konečná aj množina $\mathcal{P}(X)$.

T-konečnosť a \aleph

Tvrdenie (ZF)

Nech X je ľubovoľná množina. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) X je T-konečná;
- (ii) existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $|X| = n$;
- (iii) existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $|X| \leq n$.

T-konečnosť a \aleph

Lema (ZF)

Nech $A \subseteq \mathbb{N}$ a A je neohraničená (t.j. $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists a \in A)n < a$).
Potom $|A| = \aleph_0$.

Tvrdenie (ZF)

Množina X je T-konečná práve vtedy, keď $|X| < \aleph_0$.

T-konečnosť a D-konečnosť

Tvrdenie (ZF)

Každá T-konečná množina je D-konečná.

Tvrdenie (AC)

Každá D-konečná množina je T-konečná.

Posledné uvedené tvrdenie neplatí v ZF.

$$|X| < \aleph_0 \quad \vee \quad \aleph_0 \leq |X|$$