

22.9.

1. Tautológie:

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (Pokec o tom, že sa to volá obmenená implikácia a často sa to používa – injekcia ako príklad.)

$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$ (Pokec o tom, ako to súvisí s dôkazom sporom.)

2. Množinové identity: (Pomocou výrokov/tabuľky aj cez Vennove diagramy.)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow (A \subseteq C)$$

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ (kde $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ označuje symetrický rozdiel množín)

29.9.

1. Zapísať pomocou kvantifikátorov:

Postupnosť (x_n) konverguje k 0.

Postupnosť (x_n) má limitu.

Negácie predchádzajúcich dvoch výrokov.

2. Zapísať pomocou kvantifikátorov: Existuje práve jedno x také, že platí $P(x)$.

3. Zistiť, či platí ekvivalencia alebo aspoň niektorá z implikácií a zdôvodniť:

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow [(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)]$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow [(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)]$$

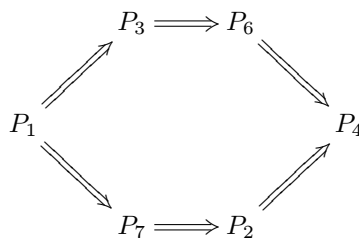
$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow [(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)]$$

$$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow [(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)]$$

$$(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow [(\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)]$$

4. Pre výrovkovú funkciu $P(x, y)$ uvažujme výroky $P_1(x, y) = (\forall x)(\forall y)P(x, y)$, $P_2 = (\forall x)(\exists y)P(x, y)$, $P_3 = (\exists x)(\forall y)P(x, y)$, $P_4 = (\exists x)(\exists y)P(x, y)$, $P_5 = (\forall y)(\forall x)P(x, y)$, $P_6 = (\forall y)(\exists x)P(x, y)$, $P_7 = (\exists y)(\forall x)P(x, y)$, $P_8 = (\exists y)(\exists x)P(x, y)$.

a) Ukážte, že pre tieto výroky platí: $P_1 \Leftrightarrow P_5$, $P_4 \Leftrightarrow P_8$ a



b) Ukážte na príklade, že implikácie v predchádzajúcom diagrame nemožno nahradiť ekvivalenciami.

c) Ukážte na príklade, že nemusia platiť implikácie $P_3 \Rightarrow P_2$ a $P_7 \Rightarrow P_6$.

Toto cvičenie sa dá stručne zhrnúť tak, že všetky vzťahy medzi výroky P_2, \dots, P_7 sú tie, ktoré sú naznačené v uvedenom diagrame.

6.10.

Usporiadaná dvojica: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

Karteziánsky súčin: $A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}$

- Ukážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C, D platí:
 - $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$;
 - $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
 - $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
 - $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
 - Ak navyše predpokladáme, že A, B, C, D sú neprázdne, tak $A \times B = C \times D$ platí práve vtedy, keď $A = C$ a $B = D$.
- Ukážte na konkrétnych príkladoch, že vo všeobecnosti neplatí $A \times B = B \times A$, $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
- Dokážte, že pre $A \neq \emptyset$ platí $A \times B \subseteq A \times C \Leftrightarrow B \subseteq C$. Platí toto tvrdenie bez predpokladu $A \neq \emptyset$?
- Ukážte, že ak $A \times C \subseteq B \times D$ a $A \times C \neq \emptyset$, tak $A \subseteq B$ a $C \subseteq D$. Ukážte na príklade, že bez predpokladu $A \times C \neq \emptyset$ už toto tvrdenie neplatí.
- Dokážte, že množiny A, B sú disjunktné práve vtedy, keď $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$.

13.10.

- Pre reláciu na množine A platí:

R je reflexívna $\Leftrightarrow id_A \subseteq R$
 R je tranzitívna $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$
 R je symetrická $\Leftrightarrow R = R^{-1}$
 R je antisymetrická práve vtedy, keď $R \cap R^{-1} = id_A$
 ľubovoľné dva rôzne prvky A sú porovnateľné v relácii $R \Leftrightarrow R \cup R^{-1} \supseteq A \times A \setminus id_A$
- Nech R je relácia medzi množinami A a B a nech $D(R) = A$. Zistite, či platia nasledujúce tvrdenia. Svoje tvrdenie vždy zdôvodnite (dokážte alebo nájdite kontrapríklad):
 - $R^{-1} \circ R = id_A$;
 - $R^{-1} \circ R \subseteq id_A$;
 - $R^{-1} \circ R \supseteq id_A$.
- Graficky znázorníte dané relácie R, S na množine A ; pokúste sa popísať a znázorniť aj relácie $R^{-1}, S^{-1}, S \circ R, R \circ S, R \circ R, S \circ S$. Ktoré z nich sú reflexívne, symetrické, antisymetrické, tranzitívne?
 - $A = \langle -1, 1 \rangle$, $R = \{(x, y) \in A \times A; x^2 + y^2 = 1\}$, $S = \{(x, y) \in A \times A; x^2 + y^2 \leq 1\}$;
 - $A = \mathbb{R}$; $R = \{(x, y) \in A \times A; |x| \geq |y|\}$, $S = \{(x, y) \in A \times A; |y| \geq |x|\}$;
 - $A = \mathbb{R}$; $R = \{(x, y) \in A \times A; |x - y| < a\}$, $S = \{(x, y) \in A \times A; |x - y| < b\}$, kde a, b sú nejaké (pevne zvolené) reálne čísla.
- Nech $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ sú zobrazenia, $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$, $E \subseteq Z$, $A_i \subseteq X$ a $B_i \subseteq Y$ pre každé $i \in I$. Potom platí
 - $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$ a ak f je injektívne, tak $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$;
 - $f[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f[A_i]$;
 - $f^{-1}[C \cap D] = f^{-1}[C] \cap f^{-1}[D]$;
 - $f[A] \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq f^{-1}[C]$.
- Ak $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow X$ sú zobrazenia také, že $g \circ f = id_X$, tak g je surjekcia a f je injekcia. Ukážte na príklade, že g nemusí byť injekcia a f nemusí byť surjekcia.
- Nech $f: A \rightarrow C$, $g: B \rightarrow D$ sú zobrazenia.
 - Ak f aj g sú injekcie, tak $f \times g$ je injekcia.
 - Ak f aj g sú surjekcie, tak $f \times g$ je surjekcia.
 - Ak f aj g sú bijekcie, tak $f \times g$ je bijekcia.
 (Definíciu zobrazenia $f \times g$ nájdete v texte k prednáške.)

3.11.

Všetky označenia, ktoré sa vyskytujú úlohách, nájdete v texte k prednáške (v kapitole o dobre usporiadaných množinách a v cvičeniach za ňou).

1. Každá podmnožina dobre usporiadanej množiny (so zdedeným usporiadaním) je dobre usporiadaná.
2. Nech (A, \leq) je dobre usporiadaná množina a $f: A \rightarrow A$ je injektívne monotónne zobrazenie. Potom pre každé $a \in A$ platí $a \leq f(a)$. (Všimnite si, že podmienku, že f je injektívne a monotónne môžeme prepísať ako $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.)
3. Ak (A, \leq) je dobre usporiadaná $f: A \rightarrow A$ je izomorfizmus, tak $f = id_A$. (Inak povedané: Jediný izomorfizmus z A do A je id_A .)
4. Ak (A, \leq) a (B, \leq) sú dobre usporiadané množiny. Potom existuje najviac jeden izomorfizmus medzi nimi.
5. Nech (X, \leq) je lineárne usporiadaná množina a nech $X' = \{X_a; a \in X\}$, kde $X_a = \{x \in X; x < a\}$. Potom zobrazenie $f: X \rightarrow X'$ určené predpisom

$$f(a) = X_a$$

je izomorfizmus medzi čiastočne usporiadanými množinami (X, \leq) a (X', \subseteq) .

6. Zistite, ktoré z uvedených dobre usporiadaných množín sú izomorfné. Môžete sa pokúsiť ich aj nejakou graficky znázorniť.
 - a) (\mathbb{N}, \leq)
 - b) $(\mathbb{N}, \leq) + (\mathbb{N}, \leq)$
 - c) $(\mathbb{N}, \leq) + (\{0\}, \leq)$
 - d) $(\{0\}, \leq) + (\mathbb{N}, \leq)$
 - e) $(\{0, 1\}, \leq) \times (\mathbb{N}, \leq)$ (lexikografický súčin)
 - f) $(\mathbb{N}, \leq) \times (\{0, 1\}, \leq)$ (lexikografický súčin)
 - g) $(\mathbb{N}, \leq) \times (\mathbb{N}, \leq)$ (lexikografický súčin)
 - h) $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\{1, 2, \dots, n\}, \leq)$
 - i) $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{N}, \leq)$

10.11. a 24.11.

1. Ukážte, že sčítanie, násobenie a umocňovanie kardinálov sú dobre definované.
2. Ukážte, že $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$. (T.j. nájdite bijekciu medzi \mathbb{Z} a \mathbb{N} .)
3. Rozhodnite o platnosti nasledujúceho tvrdenia. (Svoju odpoveď zdôvodnite, t.j. dokážte toto tvrdenie alebo nájdite kontrapríklad.)

Pre ľubovoľné množiny A, B platí $|A| < |B|$ práve vtedy, keď existuje bijekcia medzi množinou A nejakou vlastnou podmnožinou množiny B .
4. Ukážte priamo z definície (t.j. konštrukciou bijekcie resp. injekcie), že:
 - a) Ak $|A| = |B|$, tak $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.
 - b) Ak $|A| \leq |B|$, tak $|\mathcal{P}(A)| \leq |\mathcal{P}(B)|$.
5. Ukážte, že ak pre množiny A, B platí $|A \setminus B| = |B \setminus A|$, tak $|A| = |B|$. Platí obrátená implikácia?
6. Dokážte, že pre ľubovoľné kardinálne čísla a, b, c platí:
 - a) $ab = ba$
 - b) $a(bc) = (ab)c$
 - c) $a \leq b \wedge c \neq 0 \Rightarrow c^a \leq c^b$
 - d) $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$
7. Ukážte, že $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.
8. Ukážte, že pre ľubovoľný konečný kardinál n platí $\mathfrak{c} = n \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^n = \mathfrak{c}^{\aleph_0}$.
9. Ukážte, že $(2^c)^{2^c} = 2^{2^c}$. (Pokiaľ nie je jasné uzátvorkovanie, myslí sa tým $(2^c)^{(2^c)} = 2^{(2^c)}$.)

Zvyšok

Počas zvyšku semestra namiesto niektorých cvičení bude prednáška.

1. Ukážte, že ak A je spočítateľná, $|B| > \aleph_0$ a $A \subseteq B$, tak $|B \setminus A| = |B|$. (Neskôr ukážeme že pre každú množinu platí buď $|X| < \aleph_0$ alebo $|X| \geq \aleph_0$. Na základe tohoto faktu dostávame z tejto úlohy: Ak A je spočítateľná množina, B je nespočítateľná množina a $A \subseteq B$, tak $|B \setminus A| = |B|$.)
2. Ukážte, že množina všetkých zobrazení z \mathbb{Q} do \mathbb{Q} nie je spočítateľná. (Môžete vyskúšať použiť diagonálnu metódu aj priamy výpočet kardinality tejto množiny.)
3. Ukážte, že množina všetkých konečných podmnožín \mathbb{N} je spočítateľná.
4. Aká je kardinalita množiny všetkých injekcií z \mathbb{N} do \mathbb{N} ?
5. Nech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia taká, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(f(x)) = x$. Dokážte, že existuje iracionálne číslo, ktoré sa funkciou f zobrazí na iracionálne číslo.
6. S využitím faktu, že pre nekonečné kardinály platí $b \cdot b = b$ (ktorý sme nedokazovali) ukážte, že ak $2 < a \leq b$, kde a, b sú nekonečné kardinály, tak $2^b = a^b$.
7. Nech $S = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Ukážte, že existujú množiny V, H také, že $S = V \cup H$, prienik V sa každou vertikálnou priamkou v rovine \mathbb{R}^2 je konečný a prienik H sa každou horizontálnou priamkou je konečný. (T.j. pre každé $x \in \mathbb{Q}$ sú množiny $\{y \in \mathbb{Q}; (x, y) \in V\} = \{x\} \times \mathbb{Q} \cap V$ aj $\{y \in \mathbb{Q}; (y, x) \in H\} = \mathbb{Q} \times \{x\} \cap H$ konečné.) Hint: Vedeli by ste podobné tvrdenie dokázať pre \mathbb{N} namiesto \mathbb{Q} ?

Prehľad o operáciách s kardinálnymi číslami

$$a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$$

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$$

$$a + b = b + a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$b \leq c \Rightarrow a + b \leq a + c$$

$$ab = ba$$

$$a(bc) = (ab)c$$

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$b \leq c \Rightarrow ab \leq ac$$

$$a^2 = a \cdot a$$

$$a \leq b \Rightarrow a^c \leq b^c$$

$$a \leq b \wedge c \neq 0 \Rightarrow c^a \leq c^b$$

$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$$

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

$$(ab)^c = a^c \cdot b^c$$

$$a^b \leq 2^{ab}$$

$$a < 2^a$$

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

$$a \geq \aleph_0 \Rightarrow \aleph_0 + a = a$$

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

$$2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

Bez dôkazu sme si povedali (t.j. toto nemôžete používať v riešeniach, ale je to užitočné ako pomôcka), že pre ľubovoľné nekonečné kardinálne čísla a, b platí:

$$a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}.$$