

Zadania prémieových úloh

1. Nech \circ je asociatívna binárna operácia na množine G taká, že existuje prvok $e \in G$ taký, že

$$\begin{aligned}(\forall a \in G)e \circ a &= a \\ (\forall a \in G)(\exists b \in G)b \circ a &= e\end{aligned}$$

(Inými slovami, e je ľavý neutrálny prvok. Navyše pre každé a existuje prvok, ktorý by sme mohli nazvať „ľavý inverzný“ vzhľadom na tento jeden konkrétny ľavý neutrálny prvok e .) Dokážte, že (G, \circ) je grupa. Ukážte na príklade, že ak by sme podmienku $(\forall a \in G)(\exists b \in G)b \circ a = e$ nahradili podmienkou $(\forall a \in G)(\exists b \in G)a \circ b = e$, tak (G, \circ) nemusí byť grupa.

2. Ak $*$ je asociatívna binárna operácia na G , tak hovoríme, že $(G, *)$ je pologrupa. Dokážte, že konečná pologrupa, v ktorej platia zákony o krátení, je grupa. Platí to aj pre nekonečné pologrupy? (Dokážte alebo nájdite kontrapríklad.)
3. Nech G je grupa. Pre podmnožiny $A, B \subseteq G$ označíme $AB = \{ab; a \in A, b \in B\}$.
 - a) Nech A a B sú podgrupy G . Dokážte, že AB je podgrupa G práve vtedy, keď $AB = BA$.
 - b) Nájdite príklad grupy G a jej podgrúp A a B takých, že AB nie je podgrupa G .
 - c) Ak A, B sú konečné podgrupy G , tak $|AB| \cdot |A \cap B| = |A| \cdot |B|$.
 - d) Nech A, B, C sú podgrupy také, že $A \subseteq C \subseteq AB$. Dokážte $C = (AB) \cap (AC) = A(B \cap C)$.
4. Dokážte, že grupa A_4 párnych permutácií 4-prvkovej množiny nemá žiadnu 6-prvkovú podgrupu. (Kontrapríklad ukazujúci, že neplatí obrátenie Lagrangeovej vety.)
5. Nech G je grupa.
 - a) Pre normálnu podgrupu H definujme reláciu R ako $aRb \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$. Dokážte, že táto relácia je kongruencia (definícia je v poznámkach k prednáške). Dokážte, že rozklad zodpovedajúci relácii R je práve rozklad G podľa podgrupy H .
 - b) Dokážte, že ak R je kongruencia na G , tak $[e]_R$ je normálna podgrupa G . Navyše, rozklad určený reláciou ekvivalencie R je práve rozklad G podľa tejto podgrupy.
 - c) Overte, že priradenia medzi normálnymi podgrupami G a kongruenciami na G z predchádzajúcich častí úlohy sú navzájom inverzné.
6. Nech G je grupa. Dva prvky x a y nazveme konjugované, ak existuje prvok $a \in G$ taký, že $y = axa^{-1}$. V tejto úlohe budeme označovať, že x a y sú konjugované, ako $x \sim y$.

- a) Dokážte, že relácia \sim (relácia konjugovanosti) je relácia ekvivalencie na množine G . Triedy tejto relácie ekvivalencie budeme volať triedy konjugácie.
- b) Dokážte, že podgrupa grupy G je normálna práve vtedy, keď je zjednotením niektorých tried konjugácie.
- c) Tvorí prvky, pre ktoré je trieda konjugácie jednoprvková, podgrupu grupy G ? Je to normálna podgrupa?
7. Budeme pracovať v grupe (S_n, \circ) všetkých permutácií množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Hovoríme, že permutácie φ, ψ majú rovnaký cyklový typ, ak obe sa dajú zapísať ako súčin disjunktných cyklov tak, že v oboch rozkladoch sú dĺžky cyklov presne rovnaké. T.j. vieme ich zapísať ako $\varphi = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k$ a $\psi = \sigma'_1 \sigma'_2 \dots \sigma'_k$, kde σ_i a σ'_i sú cykly a majú rovnakú dĺžku. (Napríklad (12)(345) a (14)(235) majú rovnaký cyklový typ.)
Dokážte, že $\varphi, \psi \in S_n$ majú rovnaký cyklový typ práve vtedy, ak existuje permutácia $\tau \in S_n$ taká, že $\tau \varphi \tau^{-1} = \psi$. (V terminológii z predošlej úlohy to vieme povedať tak, že φ a ψ sú konguované v grupe S_n .)
8. Nech $a, b \in G$, kde G je grupa. Ukážte, že ak $ba = a^4 b^3$, tak prvky $a^4 b$ a $a^2 b^3$ majú rovnaký rád.
9. a) Dokážte, že v okruhu $C(0, 1)$ je každý ideál tvaru $M_p = \{f \in C(0, 1); f(p) = 0\}$ pre $p \in \langle 0, 1 \rangle$ maximálny.
b) Dokážte, že všetky maximálne ideály v $C(0, 1)$ majú takýto tvar.
10. Nech $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ a platí $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$; a, b, c, d sú navzájom rôzne celé čísla. Prečo neexistuje $k \in \mathbb{Z}$ také, že $f(k) = 8$?
11. (Existencia transcendentných čísel.) Dokážte, že existuje aspoň jedno reálne číslo, ktoré nie je algebraické nad \mathbb{Q} .