Axiomatická teória množín

4. marca 2019

Hilbertov program

Ciele: Pomocou axiomatického prístupu

- odstrániť známe paradoxy;
- dokázať bezospornosť teórie množín;
- v rámci tejto teórie sformalizovať celú matematiku.

Definícia formuly

- Ak x, y sú množinové premenné, tak $(x = y)$ a $(x \in y)$ sú formuly teórie množín. (Tieto dva typy formúl nazývame *atomické formuly*.)
- Ak φ, ψ sú formuly teórie množín, tak aj zápisy $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$ a $\varphi \Leftrightarrow \psi$ sú formuly teórie množín.
- Ak x je množinová premenná a φ je formula teórie množín, tak $((\exists x)\varphi)$ a $((\forall x)\varphi)$ sú tiež formuly teórie množín.

Za *formuly teórie množín* považujeme len atomické formuly a formuly, ktoré z nich vieme získať použitím konečného počtu uvedených pravidiel.

Jazyk teórie množín

Príklady formúl:

$$(x \in y) \wedge (\forall z)(z \in y \Rightarrow z \in x)$$
$$(\forall x)(x \in y \Rightarrow x \in z)$$
$$(x = y) \wedge (y = z) \Rightarrow (x = z)$$

Axiomatický prístup:

- formuly (=o čom hovoríme)
- pravidlá odvodzovania (=logika)
- axiómy (=čo predpokladáme)

Modus ponens

Ak platí P a $P \Rightarrow Q$, tak platí Q.

$$P, P \Rightarrow Q \vdash Q$$

Existencia

$P(x)$ je ľubovoľná výroková formula, a, x sú premenné, a sa nevyskytuje v $P(x)$

$$P(a) \Rightarrow (\exists x)P(x)$$

Axiómy systému ZFC

Axióma I (Axióma extenzionality)

$$(\forall x)(\forall y)[(x = y) \Leftrightarrow (\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)]$$

Dve množiny sa rovnajú práve vtedy, keď obsahujú rovnaké prvky.

Axióma IV (Axióma existencie)

$$(\exists x)(x = x)$$

Existuje aspoň jedna množina.

Axiómy systému ZFC

Axióma II (Axióma zjednotenia množín)

$$(\forall A)(\exists U)(\forall z)(z \in U \Leftrightarrow (\exists a \in A)(z \in a))$$

Pre ľubovoľnú množinu A existuje taká množina U, ktorá obsahuje práve tie prvky, ktoré patria do niektorej z množín patriacich do A.

Axióma III (Axióma dvojice)

$$(\forall a)(\forall b)(\exists C)(\forall z)[z \in C \Leftrightarrow (z = a) \vee (z = b)]$$

Ak a, b sú množiny, tak existuje množina ktorá obsahuje práve prvky a, b a žiadne iné. Túto množinu označíme $\{a, b\}$.

Axiómy systému ZFC

Definícia

Ak A, B sú množiny, tak hovoríme, že A je *podmnožinou* B, ak každý prvok množiny A je prvkom množiny B. Tento fakt označíme $A \subseteq B$.

$$A \subseteq B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall z)(z \in A \Rightarrow z \in B)$$

Axiómy systému ZFC

Axióma VI (Axióma potenčnej množiny)

$$(\forall A)(\exists P)(\forall z)(z \in P \Leftrightarrow z \subseteq A)$$

Pre každú množinu A existuje množina P pozostávajúca práve z podmnožín množiny A.

Definícia

Množinu všetkých podmnožín množiny A nazývame *potenčná množina* množiny A a označujeme $\mathcal{P}(A)$.

$$\mathcal{P}(A) = \{B; B \subseteq A\}$$

Relatívna konzistentnosť

Máme sformalizovaný pojem dôkazu.
Dôkaz je vlastne postupnosť znakov vyhovujúca nejakým pravidlám.

- Môžeme sa snažiť overiť bezospornosť axiomatického systému.
- Môžeme dôkazy kontrolovať (generovať) počítačom.
- Môžeme zmysluplne hovoriť o tom, či je nejaké tvrdenie dokázateľné.

Príklad modelu – grupy

Teória grúp: formuly vyjadrené pomocou logických spojok, kvantifkátorov, binárnej operácie.
Axiómy:

- $(\forall a, b, c \in G) a * (b * c) = (a * b) * c$
- $(\exists e \in G)(\forall a \in G) e * a = a * e$
- $(\forall a \in G)(\exists b \in G) a * b = b * a = e$

Model: ľubovoľná grupa.

Príklad modelu – grupy

Z uvedených axióm sa nedá dokázať:

$$(\forall a, b \in G) a * b = b * a.$$

Model, kde to neplatí: Ľubovoľná nekomutatívna grupa.

Príklad modelu – geometria

Axiómy: Euklidove axiómy, axiómy incidencie, ...
Modely: Euklidovská rovina, Kleinov model (Lobačevského geometria)

Hypotéza kontinua

Vieme:

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$$
$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

Hypotéza kontinua (CH): Nexistuje kardinál a taký, že $\aleph_0 < a < \mathfrak{c}$.
CH sa nedá z axióm ZFC dokázať ani vyvrátiť.

Zovšeobecnená hypotéza kontinua:

$\aleph_1$ = najmenší nespočítateľný kardinál

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Zovšeobecnená hypotéza kontinua (GCH):

$$2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$$