Výroky, kvantifikátory

1. Tautológie:
   $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
   $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (Pokec o tom, že sa to volá obmenená implikácia a často sa to používa – injekcia ako príklad.)
   $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$ (Pokec o tom, ako to súvisí s dôkazom sporom.)
2. Množinové identity: (Pomocou výrokov/tabuľky aj cez Vennove diagramy.)
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow (A \subseteq C)$
   $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ (kde $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ označuje symetrický rozdiel množín)
3. Zapísať pomocou kvanfikátorov:
   Postupnosť (x_n) konverguje k 0.
   Postupnosť (x_n) má limitu.
   Negácie predchádzajúcich dvoch výrokov.
4. Zapísať pomocou kvantifkátorov: Existuje práve jedno x také, že platí $P(x)$.
5. Zistiť, či platí ekvivalencia alebo aspoň niektorá z implikácií a zdôvodniť:
   $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow [(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)]$
   $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow [(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)]$
   $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow [(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)]$
   $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow [(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)]$
   $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow [(\exists x P(x)) \Rightarrow (\exists x Q(x))]$
6. Pre výrokovú funkciu $P(x, y)$ uvažujme výroky $P_1(x, y) = (\forall x)(\forall y)P(x, y)$, $P_2 = (\forall x)(\exists y)P(x, y)$, $P_3 = (\exists x)(\forall y)P(x, y)$, $P_4 = (\exists x)(\exists y)P(x, y)$, $P_5 = (\forall y)(\forall x)P(x, y)$, $P_6 = (\forall y)(\exists x)P(x, y)$, $P_7 = (\exists y)(\forall x)P(x, y)$, $P_8 = (\exists y)(\exists x)P(x, y)$.
   a) Ukážte, že pre tieto výroky platí: $P_1 \Leftrightarrow P_5$, $P_4 \Leftrightarrow P_8$ a

$$\begin{tikzcd}
 & P_3 \arrow[r, Rightarrow] & P_6 \arrow[dr, Rightarrow] & \\
P_1 \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & P_4 \\
 & P_7 \arrow[r, Rightarrow] & P_2 \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

   b) Ukážte na príklade, že implikácie v predchádzajúcom diagrame nemožno nahradiť ekvivalenciami.
   c) Ukážte na príklade, že nemusia platiť implikácie $P_3 \Rightarrow P_2$ a $P_7 \Rightarrow P_6$.
   Toto cvičenie sa dá stručne zhrnúť tak, že všetky vzťahy medzi výrokmi $P_2, \ldots, P_7$ sú tie, ktoré sú naznačené v uvedenom diagrame.

Operácie s množinami, zobrazenia

Usporiadaná dvojica: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$
Karteziánsky súčin: $A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}$

Vzor a obraz množiny:

$$f[A] = \{f(a); a \in A\}$$
$$f^{-1}[B] = \{a \in A; f(a) \in B\}$$

alebo inak

$$y \in f[A] \Leftrightarrow (\exists a \in A) y = f(a)$$
$$x \in f^{-1}[B] \Leftrightarrow f(x) \in B$$

1. Ukážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C, D platí:
   (a) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$;
   (b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
   (c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
   (d) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
   (e) Ak navyše predpokladáme, že A, B, C, D sú neprázdne, tak $A \times B = C \times D$ platí práve vtedy, keď $A = C$ a $B = D$.
2. Ukážte na konkrétnom príklade, že vo všeobecnosti neplatí $A \times B = B \times A$.
3. Dokážte, že pre $A \neq \emptyset$ platí $A \times B \subseteq A \times C \Leftrightarrow B \subseteq C$. Platí toto tvrdenie bez predpokladu $A \neq \emptyset$?
4. Ukážte, že ak $A \times C \subseteq B \times D$ a $A \times C \neq \emptyset$, tak $A \subseteq B$ a $C \subseteq D$. Ukážte na príklade, že bez predpokladu $A \times C \neq \emptyset$ už toto tvrdenie neplatí.
5. Dokážte, že množiny A, B sú disjunktné práve vtedy, keď $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$.
6. Nech $f \colon X \to Y$, $g \colon Y \to Z$ sú zobrazenia, $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$, $E \subseteq Z$, $A_i \subseteq X$ a $B_i \subseteq Y$ pre každé $i \in I$. Potom platí
   (a) $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$ a ak f je injektívne, tak $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$;
   (b) $f[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f[A_i]$;
   (c) $f^{-1}[C \cap D] = f^{-1}[C] \cap f^{-1}[D]$;
   (d) $f[A] \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq f^{-1}[C]$.
7. Ak $f \colon X \to Y$ a $g \colon Y \to X$ sú zobrazenia také, že $g \circ f = id_X$, tak g je surjekcia a f je injekcia. Ukážte na príklade, že g nemusí byť injekcia a f nemusí byť surjekcia.
8. Nech $f \colon A \to C$, $g \colon B \to D$ sú zobrazenia.
   (a) Ak f aj g sú injekcie, tak $f \times g$ je injekcia.
   (b) Ak f aj g sú surjekcie, tak $f \times g$ je surjekcia.
   (c) Ak f aj g sú bijekcie, tak $f \times g$ je bijekcia.
   (Definíciu zobrazenia $f \times g$ nájdete v texte k prednáške.)
9. Nech $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$. Dokážte, že $\bigcup \mathcal{S} \subseteq \bigcup \mathcal{S}'$. Ak navyše predpokladáme $\mathcal{S} \neq \emptyset$, tak $\bigcap \mathcal{S} \supseteq \bigcap \mathcal{S}'$.
10. Dokážte:
    (a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
    (b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
    (c) Ak pre každé $i \in I$ je B_i množina, tak platí $A \setminus \bigcap\limits_{i \in I} B_i = \bigcup\limits_{i \in I} (A \setminus B_i)$ a $A \setminus \bigcup\limits_{i \in I} B_i = \bigcap\limits_{i \in I} (A \setminus B_i)$.
    (d) Ak $B \subseteq C$, tak $A \setminus C \subseteq A \setminus B$.

Kardinálne čísla

1. Ukážte, že porovnávanie, sčitovanie, násobenie a umocňovanie kardinálov sú dobre definované.
2. Ukážte, že $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$. (T.j. nájdite bijekciu medzi $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{N}$.)
3. Rozhodnite o platnosti nasledujúceho tvrdenia. (Svoju odpoveď zdôvodnite, t.j. dokážte toto tvrdenie alebo nájdite kontrapríklad.)
   Pre ľubovoľné množiny A, B platí $|A| < |B|$ práve vtedy, keď existuje bijekcia medzi množinou A nejakou vlastnou podmnožinou množiny B.
4. Ukážte priamo z definície (t.j. konštrukciou bijekcie resp. injekcie), že:
   a) Ak $|A| = |B|$, tak $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.
   b) Ak $|A| \leq |B|$, tak $|\mathcal{P}(A)| \leq |\mathcal{P}(B)|$.
5. Ukážte, že ak pre množiny A, B platí $|A \setminus B| = |B \setminus A|$, tak $|A| = |B|$. Platí obrátená implikácia?
6. Dokážte, že pre ľubovoľné kardinálne čísla a, b, c platí:
   a) $ab = ba$
   b) $a(bc) = (ab)c$
   c*) $a \leq b \wedge c \neq 0 \Rightarrow c^a \leq c^b$
   d*) $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$
7. Ukážte, že $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.
8. Ukážte, že pre ľubovoľný konečný kardinál n platí $\mathfrak{c} = n \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^n = \mathfrak{c}^{\aleph_0}$.
9. Ukážte, že $(2^{\mathfrak{c}})^{2^{\mathfrak{c}}} = 2^{2^{\mathfrak{c}}}$. (Pokiaľ nie je jasné uzátvorkovanie, myslí sa tým $(2^{\mathfrak{c}})^{(2^{\mathfrak{c}})} = 2^{(2^{\mathfrak{c}})}$.)

Spočítateľné a nespočítateľné množiny

1. Ukážte, že ak A je spočítateľná, $|B| > \aleph_0$ a $A \subseteq B$, tak $|B \setminus A| = |B|$. (S použitím axiómy výberu sa dá ukázať, že pre každú množinu platí buď $|X| < \aleph_0$ alebo $|X| \geq \aleph_0$. Na základe tohoto faktu dostávame z tejto úlohy: Ak A je spočítateľná množina, B je nespočítateľná množina a $A \subseteq B$, tak $|B \setminus A| = |B|$.)
2. Ukážte, že množina všetkých zobrazení z $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{Q}$ nie je spočítateľná. (Môžete vyskúšať použiť diagonálnu metódu aj priamy výpočet kardinality tejto množiny.)
3. Ukážte, že množina všetkých konečných podmnožín $\mathbb{N}$ je spočítateľná.
4. Aká je kardinalita množiny všetkých injekcií z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$?
5. Nech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia taká, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(f(x)) = x$. Dokážte, že existuje iracionálne číslo, ktoré sa funkciou f zobrazí na iracionálne číslo.
6. S využitím faktu, že pre nekonečné kardinály platí $b \cdot b = b$ (ktorý sme nedokazovali) ukážte, že ak $2 < a \leq b$, kde a, b sú nekonečné kardinály, tak $2^b = a^b$.
7. Nech $S = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Ukážte, že existujú množiny V, H také, že $S = V \cup H$, prienik V sa každou vertikálnou priamkou v rovine $\mathbb{R}^2$ je konečný a prienik H sa každou horizontálnou priamkou je konečný. (T.j. pre každé $x \in \mathbb{Q}$ sú množiny $\{y \in \mathbb{Q}; (x,y) \in V\} = \{x\} \times \mathbb{Q} \cap V$ aj $\{y \in \mathbb{Q}; (y,x) \in H\} = \mathbb{Q} \times \{x\} \cap H$ konečné.) Hint: Vedeli by ste podobné tvrdenie dokázať pre $\mathbb{N}$ namiesto $\mathbb{Q}$?
8. Z daných bodov v rovine vieme vytvárať nové body pomocou pravítka a kružidla takto: Môžeme spojiť dva body priamkou. Môžeme zostrojiť kružnicu takú, že stred bude v niektorom zo zadaných bodov a polomer je vzdialenosť niektorých dvoch zadaných bodov. Dostaneme takto nové body na priesečníkoch takýchto priamok a kružníc.
   Nazvime *skonštruovateľnými bodmi* v rovine body $(0,0)$ a $(0,1)$ a ďalej všetky body, ktoré vieme z týchto bodov dostať uvedeným spôsobom pomocou konečne veľa krokov. Aká je kardinalita množiny všetkých skonštruovateľných bodov? Viete na základe toho zdôvodniť, že existujú body v rovine, ktoré z jednotkovej úsečky nie je možné zostrojiť

pomocou pravítka a kružidla?

Prehľad o operáciách s kardinálnymi číslami

$$a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$$
$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$$
$$a + b = b + a$$
$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$b \leq c \Rightarrow a + b \leq a + c$$
$$ab = ba$$
$$a(bc) = (ab)c$$
$$a(b + c) = ab + ac$$
$$b \leq c \Rightarrow ab \leq ac$$
$$a^2 = a \cdot a$$
$$a \leq b \Rightarrow a^c \leq b^c$$
$$a \leq b \wedge c \neq 0 \Rightarrow c^a \leq c^b$$
$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$$
$$(a^b)^c = a^{bc}$$
$$(ab)^c = a^c \cdot b^c$$
$$a^b \leq 2^{ab}$$
$$a < 2^a$$
$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$
$$a \geq \aleph_0 \Rightarrow \aleph_0 + a = a$$
$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$
$$2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

Bez dôkazu sme si povedali (t.j. toto nemôžete používať v riešeniach, ale je to užitočné ako pomôcka), že pre ľubovoľné nekonečné kardinálne čísla a, b platí:

$$a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}.$$

Opakovanie

1. Overte, či výrok $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)]$ je tautológia.
2. Nech $I \neq \emptyset$ a pre každé $i \in I$ platí $A_i \subseteq B_i$. Dokážte, že potom $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$ a $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i$.
3. Dokážte, že $A \subseteq B$ platí práve vtedy, keď:
   a) $A \cap B = A$;
   b) $A \cup B = B$;
   c) $A \setminus B = \emptyset$.
4. Nech $f\colon X \to Y$, $g, h\colon Y \to Z$ sú zobrazenia. Dokážte, že:
   a) Ak f je surjekcia, tak platí $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$.
   b) Ak $|Z| \geq 2$ a platí (pre ľubovoľné $g, h\colon Y \to Z$) implikácia $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$, tak f je surjekcia.
5. Nech $g, h\colon X \to Y$, $f\colon Y \to Z$ sú zobrazenia. Dokážte, že:
   a) Ak f je injekcia a platí $f \circ g = f \circ h$, tak $g = h$.
   b) Ak $X \neq \emptyset$ a pre ľubovoľné $g, h\colon X \to Y$ platí implikácia $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$, tak f je injekcia.
6. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie, $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$. Dokážte, alebo nájdite kontrapríklad.:
   a) $f^{-1}[C \cup D] = f^{-1}[C] \cup f^{-1}[D]$;
   b) $f^{-1}[C \setminus D] = f^{-1}[C] \setminus f^{-1}[D]$;
   c) $f[A \setminus B] = f[A] \setminus f[B]$;
   d) Ak f je injektívne, tak $f[A \setminus B] = f[A] \setminus f[B]$.
   e) $f[A] \setminus f[B] \subseteq f[A \setminus B]$;
7. Vypočítajte zadané kardinálne číslo: a) $2^{\mathfrak{c}} \cdot \mathfrak{c}^{\aleph_0}$; b) $2^{\mathfrak{c}} \cdot \mathfrak{c}$; c) $\mathfrak{c} + 2^{\mathfrak{c}}$; d) $2^{\aleph_0} \cdot \aleph_0$; e) $2^{\mathfrak{c}} \cdot \mathfrak{c} \cdot \aleph_0$.
8. Vypočítajte kardinality daných množín: a) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$; b) $\mathbb{C} \times \mathbb{Z}$; c) $\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$; d) $\mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$.
9. Majú množiny $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ rovnakú kardinalitu? Ak nie, ktorá z nich je väčšia.