LIN. ZOBRAZENIA (+ SÚČIN MATÍC)

DNES: EŠTE lin. zobrazenia

$\updownarrow$

NOVÉ matice

Ukážeme si, ako súvisia

MATICE

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(F)$$

Definícia 5.1.3. Nech A, B sú matice typu $\underline{m \times n}$ nad poľom F a $c \in F$.

(a) *Súčet matíc* $A = ||a_{ij}||$ a $B = ||b_{ij}||$ je matica $A + B = ||a_{ij} + b_{ij}||$.

(b) Matica $c.A = ||ca_{ij}||$ sa nazýva *c-násobok* matice A.

(Teda sčitovanie matíc a násobenie matice skalárom definujeme po súradniciach.)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$c\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & \dots & ca_{1n} \\ \vdots & & \\ ca_{m1} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

$A+B$, $c \cdot A$ nezáleží na usp. v riadkoch (po súradniciach)

$M_{m,n}(F)$ „$\cong$" $F^{m \cdot n}$

$+, \cdot$

TU ZÁLEŽÍ

$\downarrow$

ERO, r. ekv.

DNES: $A \cdot B$ súčin

Veta 5.1.5. *Matice typu $m \times n$ nad poľom F s takto definovaným sčitovaním a násobením skalármi tvoria vektorový priestor nad poľom F.*

$(M_{m,n}(F), +, \cdot)$

LINEÁRNE ZOBR.

Nasledujúcu vetu niektorí autori nazývajú *základná veta o lineárnych zobrazeniach.*

Veta 5.3.7. *Nech V, W sú vektorové priestory. Nech $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V a nech $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n \in W$. Potom existuje práve jedno lineárne zobrazenie $f\colon V \to W$ také, že*

$$\boxed{f(\vec{\alpha}_i) = \vec{\beta}_i}$$

pre $i = 1, 2, \dots, n$.

Obrazy bázy jedn. určujú lin. zobr.

D: Pre ľub. $\vec{\alpha} \in V$

$\exists$ JEDN. URČ. $c_1, \dots, c_n \in F$ t. ž.

$$\vec{\alpha} = c_1 \vec{\alpha}_1 + c_2 \vec{\alpha}_2 + \dots + c_n \vec{\alpha}_n$$

$$f(\vec{\alpha}) = f(c_1 \vec{\alpha}_1 + c_2 \vec{\alpha}_2 + \dots + c_n \alpha_n)$$

$$= c_1 f(\vec{\alpha}_1) + c_2 f(\vec{\alpha}_2) + \dots + c_n f_n(\vec{\alpha}_n)$$

$(*)$ $$f(\vec{\alpha}) = c_1 \vec{\beta}_1 + c_2 \vec{\beta}_2 + \dots + c_n \vec{\beta}_n$$

MÁM: jedn. ✓

EŠTE: Je f lineárne?

(1) $f(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = f(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta})$ ✓ pre $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$

$\vec{\alpha} = c_1 \vec{\alpha}_1 + \dots + c_n \vec{\alpha}_n$ $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $f(\vec{\alpha}) = c_1 \vec{\beta}_1 + \dots + c_n \vec{\beta}_n$

$\vec{\beta} = d_1 \vec{\alpha}_1 + \dots + d_n \vec{\alpha}_n$ $\quad f(\vec{\beta}) = d_1 \vec{\beta}_1 + \dots + d_n \vec{\beta}_n$

$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (c_1 + d_1)\vec{\alpha}_1 + \dots + (c_n + d_n)\vec{\alpha}_n \Rightarrow$

$$f(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = (c_1 + d_1)\vec{\beta}_1 + \dots + (c_n + d_n)\vec{\beta}_n$$

$$\Downarrow$$

$f(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta})$ ✓

(2) $f(c\vec{\alpha}) = c f(\vec{\alpha})$ N.D.Ú.

F^n štand. báza $\vec{\varepsilon}_1 = (1,0,\dots,0)$ $\quad \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$

$\vec{\varepsilon}_2 = (0,1,0,\dots,0)$

$\vdots$

$\vec{\varepsilon}_n = (0,\dots,0,1)$

F^m $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_m \to$ báza

Definícia 5.3.8. Nech F je pole. *Matica lineárneho zobrazenia* $f\colon F^m \to F^n$ je matica typu $m \times n$ ktorej k-ty riadok je vektor $f(\vec{\varepsilon}_k)$.

Maticu zobrazenia f budeme označovať A_f.

Každému lineárnemu zobrazeniu $f\colon F^m \to F^n$ sme takto priradili nejakú maticu A_f typu $m \times n$.

Obrátene, ľubovoľnou maticou typu $m \times n$ je jednoznačne určené lineárne zobrazenie $f\colon F^m \to F^n$. (Riadky matice určujú obrazy bázových vektorov, jednoznačnosť a existencia takéhoto zobrazenia vyplývajú z vety $\boxed{5.3.7}$.) Lineárne zobrazenie prislúchajúce matici A budeme označovať f_A.

$$A_f = \begin{pmatrix} f(\vec{\varepsilon}_1) \\ \vdots \\ f(\vec{\varepsilon}_m) \end{pmatrix} \quad \dots \text{ matica zobr. } f : F^m \to F^n$$

$m \times n$

Pr: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$f(x,y) = (x+y, 2x-y, x-3y)$ ... lin. zobr.

$f(1,0) = (1,2,1)$ $\qquad A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$f(0,1) = (1,-1,-3)$

Veta 5.3.10. *Nech U, V, W sú vektorové priestory nad tým istým poľom F. Ak $f\colon U \to V$ a $g\colon V \to W$ sú lineárne zobrazenia, tak aj $g \circ f$ je lineárne zobrazenie.*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & V \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

D: $(\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in U)$

$$g(f(c\vec{\alpha} + d\vec{\beta})) \overset{f \text{ je lin.}}{=} g(c f(\vec{\alpha}) + d f(\vec{\beta})) \underset{g \text{ je lin.}}{=} c\, g(f(\vec{\alpha})) + d\, g(f(\vec{\beta}))$$

$\square$

SÚČIN MATÍC

$$F^m \xrightarrow{f} F^n \xrightarrow{g} F^k$$

DANÉ: A_f, A_g OTÁZKA: $\boxed{A_{g\circ f} = ?}$

$g\circ f$ (báza)

$$f\colon F^m \to F^n \qquad A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ typu } m\times n$$

$$g\colon F^n \to F^k \qquad A_g = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} \text{ typu } n\times k$$

Opäť nech $\vec{\delta}_1, \dots, \vec{\delta}_m$ je štandardná báza F^m a $\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n$ je štandardná báza F^n.

$g\circ f(\vec{\delta}_i) = ?$

$$g(\underbrace{f(\vec{\delta}_i)}_{\text{i-ty riadok matice } A_f}) = g(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

$$= g(a_{i1}\vec{\varepsilon}_1 + a_{i2}\vec{\varepsilon}_2 + \dots + a_{in}\vec{\varepsilon}_n)$$

$$= a_{i1} g(\vec{\varepsilon}_1) + a_{i2} g(\vec{\varepsilon}_2) + \dots + a_{in} g(\vec{\varepsilon}_n)$$

1. riadok A_g

$$= a_{i1}(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1j}, \dots, b_{1k}) +$$
$$a_{i2}(b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2j}, \dots, b_{2k}) +$$
$$\vdots$$
$$a_{in}(b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nj}, \dots, b_{nk})$$

$A_{g\circ f}$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Definícia 5.4.2. Ak A je matica typu $m \times n$ a B je matica typu $n \times k$ nad poľom F, tak maticu $C = ||c_{ij}||$ typu $m \times k$, kde

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{tj}$$

pre $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, k$, nazývame *súčin matíc* A a B. Označujeme ju AB alebo $A \cdot B$.

Dôležité je si všimnúť, že súčin matíc definujeme iba v prípade, že počet stĺpcov prvej matice sa rovná počtu riadkov druhej matice.

$$m \times \boxed{n \quad n} \times k$$

Výsledok je matica typu $m \times k$.

$$\boxed{c_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{tj}.}$$

$c_{ij} = ?$

$$\begin{array}{cc} A & B \\ m \times n & n \times k \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots & & \\ b_{m1} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mk} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0$

$2 \times \underline{3} \quad \underline{3} \times 2 \quad \to \quad 2 \times 2$

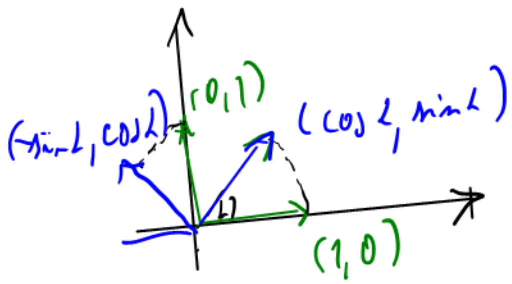
Veta 5.4.4. *Nech F je pole, $f\colon F^m \to F^n$ a $g\colon F^n \to F^k$ sú lineárne zobrazenia. Potom platí*

$$A_{g \circ f} = A_f \cdot A_g$$

PORADIE

$A_f \cdot A_g$

$m \times \boxed{n \quad n} \times k$



f ... otočenie o α

g ... otočenie o β

$$A_f = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$A_g = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$A_{g\circ f} = A_f \cdot A_g =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

Dôsledok 5.4.6. *Násobenie matíc je asociatívne, teda*

$$A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$$

pre ľubovoľné matice také, že ich možno násobiť v uvedenom poradí.

$$\underset{m\times n}{A} \quad \underset{n\times k}{B} \quad \underset{k\times l}{C}$$

D: (cez zobr.)

$$f_{A\cdot(B\cdot C)} = f_{B\cdot C}\circ f_A = (f_C\circ f_B)\circ f_A$$

$\parallel$ ← asoc. skladania

$$f_{(A\cdot B)\cdot C} = f_C\circ f_{A\cdot B} = f_C\circ(f_B\circ f_A)$$

$A\cdot(B\cdot C) =$ matica toho istého zobr. $= (A\cdot B)\cdot C$ □

D: cez i,j – predpis N.D.Ú.

Príklad 5.4.7. Násobenie matíc nie je komutatívne. (Vyplýva to aj z toho, že nie vždy, keď je definovaný súčin AB je definovaný aj súčin BA. Ukážeme si však aj príklad, kde sú súčiny v oboch poradiach definované, ale rôzne.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

→ NIE JE KOM.

V.D.Ú.

$AB \neq BA$

Veta 5.4.8. *Nech matice A, B, C nad poľom F sú majú také rozmery, že uvedené súčty a súčiny majú zmysel.*

$$I_m A = A = A I_n$$
$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(B+C)D = BD + CD$$

$$\underset{l_{ij}}{A(B+C)} = \underset{p_{ij}}{AB+AC}$$

$$d_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}.$$

$$l_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{m} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}}_{AB_{ij}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} a_{ik}c_{kj}}_{AC_{ij}} = p_{ij}$$

□

$f : F^m \to F^n \qquad A_f$

$\vec{x} \in F^m \quad \dots \qquad$ matrika $1 \times m$

$\vec{x} = (a_1, a_2, \dots a_m)$

$$\boxed{f(\vec{x}) = \vec{x} A_f}$$

$1 \times \boxed{m \ \ m} \times n \to 1 \times n$

$$(a_1, a_2, \dots, a_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

j-te pozicije : $\quad a_1 a_{1j} + a_2 a_{2j} + \dots + a_m a_{mj}$

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(a_1, a_2, \dots, a_m) = \\ &= f(a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} + \dots + a_m \vec{e_m}) = \\ &= a_1 f(\vec{e_1}) + a_2 f(\vec{e_2}) + \dots + a_m f(\vec{e_m}) \\ &= a_1 \cdot r_1 + a_2 \cdot r_2 + \dots + a_m \cdot r_m \end{aligned}$$

j-te pozicije

$$g(f(\vec{x})) = g(\vec{x} A_f) = (\vec{x} A_f) A_g = \vec{x} \boxed{(A_f \cdot A_g)}$$

$$g \circ f(\vec{x}) = \vec{x} \boxed{A_{g \circ f}}$$

Ak $A \in M_{m,n}(F)$ tak

$$\boxed{f(\vec{x}) = \vec{x} \cdot A} \quad \text{je lin. zob.}$$

$$F^m \longrightarrow F^n$$

D: $(\vec{x}+\vec{b})A = \vec{x}\cdot A + \vec{x}\cdot B$

$(c\,\vec{x})\cdot A = c\cdot(\vec{x}A)$ □

PR: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x_1, x_2) = ?$

$$f(x_1,x_2) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = (a_{11}x_1 + a_{21}x_2,\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2)$$

$$f(x, y) = (2x + y, x + 3y)$$

$$(2x + 1y,\ 1x + 3y) \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

INVERZNÁ MATICA

$f: V \to W$
lin. zobr.

? JE f^{-1} lin. zobr. ?
? KEDY f je bijekcia ?

Lema 5.5.2. *Nech $f: V \to W$ je $\boxed{\text{lineárne}}$ zobrazenie a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je $\boxed{\text{báza}}$ priestoru V.*

(i) *Zobrazenie f je injekcia práve vtedy, keď vektory $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ sú lineárne nezávislé.*

(ii) *Zobrazenie f je surjekcia práve vtedy, keď $[f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)] = W$ (teda ak vektory $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ generujú celý priestor W).*

D: (i) $\boxed{\Rightarrow}$ $c_1 f(\vec{\alpha}_1) + \dots + c_n f(\vec{\alpha}_n) = \vec{0} \overset{?}{\Rightarrow} c_1 = \dots = c_n = 0$

$$f(c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n) = f(\vec{0})$$
$$\Downarrow \text{inj.}$$
$$c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n = \vec{0}$$
$$\Downarrow \ \vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \text{ sú LN}$$
$$c_1 = \dots = c_n = 0$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $f(\vec{\alpha}) = f(\vec{\beta}) \overset{?}{\Rightarrow} \vec{\alpha} = \vec{\beta}$

$$\vec{\alpha} = c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n$$
$$\vec{\beta} = d_1\vec{\alpha}_1 + d_2\vec{\alpha}_2 + \dots + d_n\vec{\alpha}_n$$
$$f(\vec{\alpha}) = c_1 f(\vec{\alpha}_1) + c_2 f(\vec{\alpha}_2) + \dots + c_n f(\vec{\alpha}_n)$$
$$f(\vec{\beta}) = d_1 f(\vec{\alpha}_1) + d_2 f(\vec{\alpha}_2) + \dots + d_n f(\vec{\alpha}_n)$$
$$f(\vec{\alpha}) - f(\vec{\beta}) = \vec{0} = (c_1 - d_1) f(\vec{\alpha}_1) + (c_2 - d_2) f(\vec{\alpha}_2) + \dots + (c_n - d_n) f(\vec{\alpha}_n)$$
$$\Downarrow \text{LN}$$
$$c_1 - d_1 = c_2 - d_2 = \dots = c_n - d_n = 0$$
$$c_1 = d_1, \ c_2 = d_2, \ \dots, \ c_n = d_n$$
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\alpha} &= c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n \\ \vec{\beta} &= d_1\vec{\alpha}_1 + d_2\vec{\alpha}_2 + \dots + d_n\vec{\alpha}_n \end{aligned}} \longrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$$

(ii) *Zobrazenie f je surjekcia práve vtedy, keď $[f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)] = W$ (teda ak vektory $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ generujú celý priestor W).*

(ii) $\boxed{\Rightarrow}$ f je surj.

Cnb. $\vec{\beta} \in W \rightarrow$ ex. $\vec{\alpha} \in V$ t.ž. $f(\vec{\alpha}) = \vec{\beta}$

$$\vec{\alpha} = c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n$$

$$\vec{\beta} = f(\vec{\alpha}) = c_1 f(\vec{\alpha}_1) + \dots + c_n f(\vec{\alpha}_n) \quad \dots \quad W = [f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)]$$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$\vec{\beta} = \cancel{f(\vec{\alpha})} = c_1 f(\vec{\alpha}_1) + \dots + c_n f(\vec{\alpha}_n)$$

$$\vec{\beta} = f(c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n)$$

k $\vec{\beta}$ ex. vzor $\vec{\alpha} = c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n$

$\Downarrow$

f je surj. $\square$

Lema 5.5.2. *Nech $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V.*

(i) *Zobrazenie f je injekcia práve vtedy, keď vektory $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ sú lineárne nezávislé.*

(ii) *Zobrazenie f je surjekcia práve vtedy, keď $[f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)] = W$ (teda ak vektory $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ generujú celý priestor W).*

Veta 5.5.3. *Nech $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V. Zobrazenie f je bijekcia práve vtedy, keď vektory $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ tvoria bázu vektorového priestoru W.*