INVERZNÁ MATICA

MINULE: $f: V \to W$ lin. zobrazenie

$\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n$ báza V

obrazy bázových vekt.

$f(\vec{\varepsilon}_1), \dots, f(\vec{\varepsilon}_n)$

↳ jedn. určujú f

↳ povedia nám, či f je inj. / surj. / bij.

$F^n \to F^m$

$A_f = \begin{pmatrix} f(\vec{\varepsilon}_1) \\ \vdots \\ f(\vec{\varepsilon}_n) \end{pmatrix}$

Lema 5.5.2. *Nech $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V.*

(i) *Zobrazenie f je injekcia práve vtedy, keď vektory $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ sú lineárne nezávislé.*

(ii) *Zobrazenie f je surjekcia práve vtedy, keď $[f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)] = W$ (teda ak vektory $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ generujú celý priestor W).*

Veta 5.5.3. *Nech $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V. Zobrazenie f je bijekcia práve vtedy, keď vektory $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ tvoria bázu vektorového priestoru W.*

Dôsledok 5.5.4. *Nech $f\colon F^n \to F^n$ je lineárne zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) *f je bijekcia,* — $f(\vec{\varepsilon}_1), \dots, f(\vec{\varepsilon}_n)$ je báza W

(ii) *f je prosté,* — LN

(iii) *f je surjektívne.* — generujú W

$n = \dim(F^n)$

Analógia: $g: A \to A$, $|A| = n$; bij. $\Leftrightarrow$ inj. $\Leftrightarrow$ surj.

Dôsledok 5.5.5. *Nech $f\colon F^n \to F^n$ je lineárne zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(a) *zobrazenie f je bijekcia,*

(b) *existuje inverzné zobrazenie f^{-1},*

(c) *$h(A_f) = n$.*

↳ A_f je regulárna

$h(A_f) = \dim([f(\vec{\varepsilon}_1), \dots, f(\vec{\varepsilon}_n)]) = n$

$\Downarrow$

$[f(\vec{\varepsilon}_1), \dots, f(\vec{\varepsilon}_n)] = F^n$

$\Downarrow$

f je surj. $\Rightarrow$ f je bij.

$f: V \xrightarrow{\text{lin.}} W$ $\qquad f^{-1}: W \xrightarrow{?\text{lin.}?} V \qquad A_{f^{-1}} = ?$

Veta 5.5.1. *Ak $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie a existuje inverzné zobrazenie $f^{-1}\colon W \to V$, tak f^{-1} je lineárne zobrazenie.*

Veta 5.5.1. *Ak $f: V \to W$ je lineárne zobrazenie a existuje inverzné zobrazenie $f^{-1}: W \to V$, tak f^{-1} je lineárne zobrazenie.*

D:

$$(\forall \vec{a}, \vec{b} \in W)\ f^{-1}(c\vec{a} + \vec{b}) = c f^{-1}(\vec{a}) + f^{-1}(\vec{b})\ ✓$$

$$f^{-1}(\vec{a}) = \vec{a}_1 \iff f(\vec{a}_1) = \vec{a}$$

$$f^{-1}(\vec{b}) = \vec{b}_1 \iff f(\vec{b}_1) = \vec{b}$$

$$c f^{-1}(\vec{a}) + f^{-1}(\vec{b}) = c\vec{a}_1 + \vec{b}_1 = ?$$

$$f(c\vec{a}_1 + \vec{b}_1) \overset{f \text{ je lin.}}{=} c f(\vec{a}_1) + f(\vec{b}_1) = c\vec{a} + \vec{b}$$

f, f^{-1}

$$f^{-1}(c\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a}_1 + \vec{b}_1 = c f^{-1}(\vec{a}) + f^{-1}(\vec{b})\ ✓ \ \square$$

$f: F^m \to F^n$ $\quad A_f \qquad A_{f^{-1}} = ?$

Definícia 5.5.6. Nech A je matica typu $n \times n$. Hovoríme, že matica B je *inverzná* k matici A, ak platí

$$AB = BA = I_n.$$

Označujeme ju $B =: A^{-1}$.

IP v grupe - podobné

POZN: Inv. matica = matica inv. zobr.

$$f_{AB} = f_{BA} = f_I$$

$$f_B \circ f_A = f_A \circ f_B = id_{F^m}$$

$$f_B = f_A^{-1}$$

$$A_f^{-1} = A_{f^{-1}}$$

Poznámka 5.5.8. Je užitočné si uvedomiť, že ak pre *štvorcové* matice A, B rovnakých rozmerov platí niektorá z rovností $AB = I$ alebo $BA = I$, tak už B musí byť inverzná matica k A.

DEF: $\quad AB = I,\ BA = I$

$$A, B \in M_{m,m}(F)$$

$$A \cdot B = I \implies B \cdot A = I$$

$\hookrightarrow$ N.D.Ú.*

VÝPOČET A^{-1} ... cvičko

Definícia 5.5.9. Štvorcová matica typu $n \times n$ sa nazýva *regulárna*, ak $h(A) = n$.

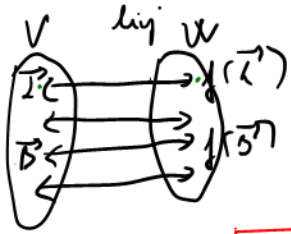
Veta 5.5.10. *Nech A je matica typu $n \times n$. K matici A existuje inverzná matica práve vtedy, keď A je regulárna.*

D: $h(A_f) = n \iff$ existuje f^{-1} $\square$

IZOMORFIZMUS

Definícia 5.5.11. Bijektívne lineárne zobrazenie $f\colon V \to W$ nazývame *izomorfimus vektorových priestorov V a W* (alebo tiež *lineárny izomorfizmus*).

Ak existuje bijektívne zobrazenie $f\colon V \to W$, hovoríme, že vektorové priestory V a W sú izomorfné. Fakt, že V a W sú izomorfné označujeme $V \cong W$.



lin.

$f(c\vec{a}) = c\, f(\vec{a})$

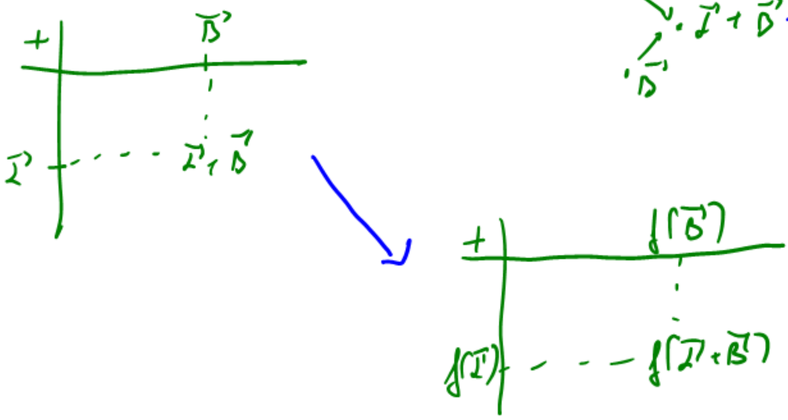
$f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$

$+ : V \times V \to V$

$\cdot : F \times V \to V$

$f =$ „slovník"

$V \cong W$ … V a W je $\boxed{\text{„len iný"}}$ VP



Dôsledok 5.5.12. *Ak V, W sú konečnorozmerné vektorové priestory a $V \cong W$, tak $d(V) = d(W)$.*

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ báza $V \longrightarrow f(\vec{a}_1), \dots, f(\vec{a}_n)$ báza W

Veta 5.5.14. *Nech V je vektorový priestor nad poľom F a $d(V) = n$. Potom V je izomorfný s priestorom F^n.*

D: $d(V) = n$

báza: $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$

Zvolíme: $f(\vec{a}_1) = \vec{e}_1,\ f(\vec{a}_2) = \vec{e}_2,\ \dots,\ f(\vec{a}_n) = \vec{e}_n$ } báza

MÁME: $f\colon V \to F^n$ lin. $\underbrace{\text{zobr. + }}_{\text{viem.}}$ bij.

$\boxed{V \cong F^n}$

$\square$

TVR: A, B - $n \times n$, regulárne:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} \\ (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \end{array} \right.$$

D: N. D. Ú. $\square$

5.6 Elementárne riadkové operácie a súčin matíc

$A \cdot B$

$A \cdot$ zľava $=$ LK riadkov

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{b_1} \\ \vdots \\ \vec{b_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\vec{b_1} + a_{12}\vec{b_2} + \dots + a_{1n}\vec{b_n} \\ \\ a_{m1}\vec{b_1} + a_{m2}\vec{b_2} + \dots + a_{mn}\vec{b_n} \end{pmatrix}$$