5.7 Sústavy lineárnych rovníc

$\mathbb{R}$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}\right) \leftarrow \text{rozš. mat. s.}$$

matica sústavy

Definícia 5.7.1. *Sústavou lineárnych rovníc* rozumieme systém rovníc tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= c_m \end{aligned} \tag{5.2}$$

kde $a_{ij}, c_i \in F$ pre všetky prípustné hodnoty indexov i a j.

Riešenie sústavy lineárnych rovníc je n-tica $(x_1, \ldots, x_n)$ ktorá spĺňa všetky uvedené rovnice. Ak existuje aspoň jedno riešenie sústavy lineárnych rovníc, hovoríme, že táto sústava je *riešiteľná*. Skaláry $c_1, \ldots, c_n$ nazývame *pravé strany*, a_{ij} sú *koeficienty* a x_i sú neznáme.

Maticu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazývame *matica sústavy* (5.2).

Maticu

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

nazývame *rozšírená matica sústavy* (5.2).

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}\right) \leftarrow \text{rozš. mat. s.}$$

matica sústavy

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{2 \times 3 \quad 3 \times 1}_{2 \times 1}$$

Pomocou matice sústavy môžeme zadefinovať *maticový zápis* sústavy

$$A\vec{x}^T = \vec{c}^T$$

alebo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Skutočne, $(x_1, \dots, x_n)$ je riešením sústavy (5.2) práve vtedy, keď platí uvedená maticová rovnosť.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_1 = c_1$$

Veta 5.7.2. *Ak rozšírené matice dvoch sústav lineárnych rovníc sú riadkovo ekvivalentné, tak tieto dve sústavy majú rovnakú množinu riešení.*

D1: ERO:

* výmena: $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$

* výmena 1. ↔ výmena 2 rovníc ✓

* c-násobok

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1m} \cdot x_m = c_1 \xrightarrow{/\cdot c} ca_{11}x_1 + \dots + ca_{1m}x_m = c \cdot c_1$$ ✓

* riadku + c-násobok iného

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m &= c_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m &= c_2 \;/\cdot c \end{aligned} \Big\}+ \quad (a_{11} + ca_{21})x_1 + \dots + (a_{1m} + ca_{2m})x_m = c_1 + c\,c_2$$ ✓

□

D2: $A \cdot \vec{x}^T = \vec{c}^T \leadsto E \cdot A\vec{x}^T = E \cdot \vec{c}^T$

ERO: $A \leadsto E \cdot A$ □

(ERO = násobenie maticou zľava)

Riešenie sústav ⇝ upraviť na RTM

HOMOGÉNNE SÚSTAVY

$c_1 = \dots = c_m = 0$

V prípade, že pravé strany sú nulové ($c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$), nazývame sústavu (5.2) *homogénna* sústava lineárnych rovníc. Ľahko si môžeme všimnúť, že v prípade homogénnej sústavy je nulový vektor $(0, 0, \ldots, 0)$ riešením sústavy. Toto riešenie nazývame *triviálne riešenie.*

Veta 5.7.3. *Množina všetkých riešení homogénnej sústavy lineárnych rovníc tvorí podpriestor priestoru F^n.*

D:

$M = \{\vec{x} \in F^n ; A \cdot \vec{x}^T = \vec{0}^T\}$ $\qquad A \quad m \times n$

$\to \vec{0} \in M : \quad A \cdot \vec{0}^T = \vec{0}^T$

$\to \vec{a}, \vec{b} \in M \xrightarrow{?} \vec{a} + \vec{b} \in M$

$A\vec{a}^T = \vec{0}^T \qquad A(\vec{a} + \vec{b})^T = A \cdot (\vec{a}^T + \vec{b}^T) =$

$A\vec{b}^T = \vec{0}^T \qquad = A \cdot \vec{a}^T + A \cdot \vec{b}^T = \vec{0}^T + \vec{0}^T = \vec{0}^T$

$\to \vec{a} \in M \to c \cdot \vec{a} \in M$

$A \cdot (c\vec{a})^T = c \cdot A\vec{a}^T = c \cdot \vec{0}^T = \vec{0}^T \qquad \square$

riešenia = VPP $\to$ dim = ?

UKÁŽEME: $\boxed{d(S) = n - h(A).}$

$A \sim \ldots \sim C \ldots$ RTM $\qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & * & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & \boxed{1} & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \ldots & 0 \end{array}\right)$

$h(A) = k \ldots$ C má k nenulových r.

BÚNV: Prípad keď ved. 1 sú v prvých stĺpcoch. (NESKÔR - čo sme zmenili)

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & c_{1,k+1} \ldots & c_{1,n} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & c_{k,k+1} & \ldots \; c_{k,n} & 0 \end{array}\right)$$

$h(A) = r$

$$\begin{aligned} x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + c_{1,r+2}x_{r+2} + \ldots + c_{1,n}x_n &= 0 \\ x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + c_{2,r+2}x_{r+2} + \ldots + c_{2,n}x_n &= 0 \\ \ldots \\ x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + c_{r,r+2}x_{r+2} + \ldots + c_{r,n}x_n &= 0 \end{aligned} \qquad (5.3)$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + c_{1,r+2}x_{r+2} + \ldots + c_{1,n}x_n &= 0\\
x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + c_{2,r+2}x_{r+2} + \ldots + c_{2,n}x_n &= 0\\
&\ldots\\
x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + c_{r,r+2}x_{r+2} + \ldots + c_{r,n}x_n &= 0
\end{aligned}
\qquad (5.3)
$$

$(-c_{1,r+1}, -c_{2,r+1}, \ldots, -c_{r,r+1}, 1, 0, \ldots, 0) \in$ množín $x_{r+1}, \ldots, x_n$

$0, 1, 0, \ldots, 0)$

$$
\begin{aligned}
\vec{\gamma}_{r+1} &= (-c_{1,r+1}, -c_{2,r+1}, \ldots, -c_{r,r+1}, 1, 0, \ldots, 0),\\
\vec{\gamma}_{r+2} &= (-c_{1,r+2}, -c_{2,r+2}, \ldots, -c_{r,r+2}, 0, 1, \ldots, 0),\\
&\ldots\\
\vec{\gamma}_{n} &= (-c_{1,n}, -c_{2,n}, \ldots, -c_{r,n}, 0, \ldots, 0, 1).
\end{aligned}
\qquad (5.4)
$$

S

Veta 5.7.4. *Vektory $\vec{\gamma}_{r+1}, \vec{\gamma}_{r+2}, \ldots, \vec{\gamma}_n$ tvoria bázu priestoru riešení homogénnej sústavy* (5.3).

D: $\vec{\gamma}_{r+1}, \ldots, \vec{\gamma}_n$ sú riešenia ✓

TREBA: $\vec{\gamma}_{r+1}, \ldots, \vec{\gamma}_n$ sú LN ✓

(?) $\vec{\gamma}_{r+1}, \ldots, \vec{\gamma}_n$ generujú S (?)

$\vec{x} = \ldots \vec{\gamma}_{r+1} + \ldots + \ldots \vec{\gamma}_n$

$$
\begin{aligned}
x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + c_{1,r+2}x_{r+2} + \ldots + c_{1,n}x_n &= 0\\
x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + c_{2,r+2}x_{r+2} + \ldots + c_{2,n}x_n &= 0\\
&\ldots\\
x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + c_{r,r+2}x_{r+2} + \ldots + c_{r,n}x_n &= 0
\end{aligned}
$$

$\downarrow$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -c_{1,r+1}\,x_{r+1} - c_{1,r+2}\,x_{r+2} - \ldots - c_{1,n}x_n\\
x_2 &= -c_{2,r+1}\,x_{r+1} - c_{2,r+2}\,x_{r+2} - \ldots - c_{2,n}x_n\\
&\vdots\\
x_r &= -c_{r,r+1}\,x_{r+1} - c_{r,r+2}\,x_{r+2} - \ldots - c_{r,n}x_n\\
x_{r+1} &= 1\,x_{r+1} + 0\\
x_{r+2} &= 0\,x_{r+1} + 1\,x_{r+2}\\
&\vdots\\
x_n &= 0\,x_{r+1} + 0 \qquad x_n
\end{aligned}
$$

$\vec{x} = x_{r+1}\vec{\gamma}_{r+1} + x_{r+2}\vec{\gamma}_{r+2} + \ldots + x_n\vec{\gamma}_n$

$\vec{x} \in [\vec{\gamma}_{r+1}, \vec{\gamma}_{r+2}, \ldots, \vec{\gamma}_n]$ □

$$
\begin{aligned}
\vec{\gamma}_{r+1} &= (-c_{1,r+1}, -c_{2,r+1}, \ldots, -c_{r,r+1}, 1, 0, \ldots, 0),\\
\vec{\gamma}_{r+2} &= (-c_{1,r+2}, -c_{2,r+2}, \ldots, -c_{r,r+2}, 0, 1, \ldots, 0),\\
&\ldots\\
\vec{\gamma}_{n} &= (-c_{1,n}, -c_{2,n}, \ldots, -c_{r,n}, 0, \ldots, 0, 1).
\end{aligned}
$$