SÚSTAVY

HOMOGÉNNE

MINULE:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 \\ & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} \boxed{1} & 0 & \dots & 0 & c_{1,r+1} & \dots & c_{1,n} & 0 \\ & \boxed{1} & & & & & & \vdots \\ & & \ddots & \boxed{1} & c_{r,r+1} & \dots & c_{r,n} & 0 \\ 0 & & & & & & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & 0 & 0 \end{array}\right)$$

S = podpr. riešení = ?

báza S ←

$$\begin{cases} \vec{\gamma}_{r+1} = (-c_{1,r+1}, -c_{2,r+1}, \dots, -c_{r,r+1}, 1, 0, \dots, 0), \\ \vec{\gamma}_{r+2} = (-c_{1,r+2}, -c_{2,r+2}, \dots, -c_{r,r+2}, 0, 1, \dots, 0), \\ \dots \\ \vec{\gamma}_{n} = (-c_{1,n}, -c_{2,n}, \dots, -c_{r,n}, 0, \dots, 0, 1). \end{cases}$$

Dôsledok 5.7.5. *Nech A je matica typu $m \times n$ a S je priestor riešení homogénnej sústavy lineárnych rovníc s maticou A. Potom*

$$\boxed{d(S) = n - h(A)}$$

D: $d(S) = n - r = n - h(A)$

$\vec{\gamma}_{r+1}, \vec{\gamma}_{r+2}, \dots, \vec{\gamma}_n$

r = # nenulových r. v RTV $= h(A)$ □

Čo ak dodám ved. jedn. v iných stĺpcoch?

↳ D prejde podobne – len v. volím hodnoty na miestach kde nemám ved. jednotky

↳ ALEBO: výmena stĺpcov

↳ nezmení $d(S)$

↳ nezmení $h(A)$

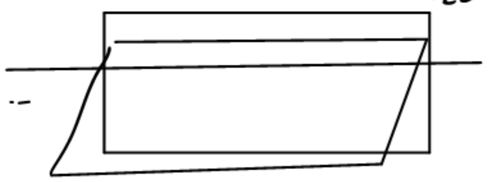
$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_3, x_2, x_1, x_4, \dots, x_n)$

výmena súr.: izom.: $F^n \longrightarrow F^n$

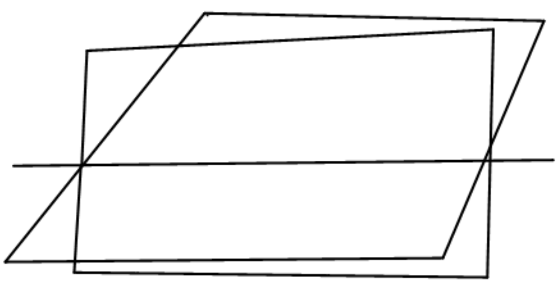
POZN: $\mathbb{R}^3$

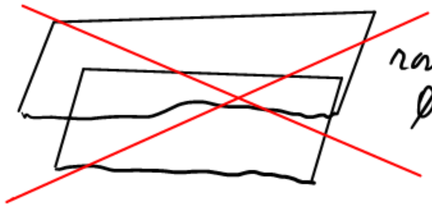
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$ ... rovina

$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$ → $\cap$ dvoch rovín



TYPICKY ?

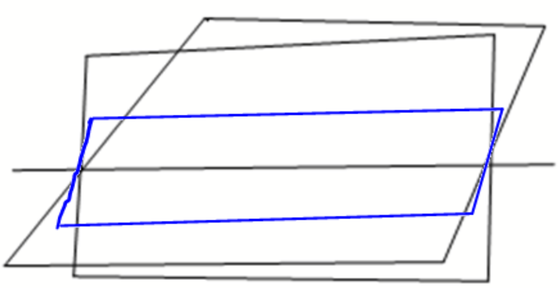


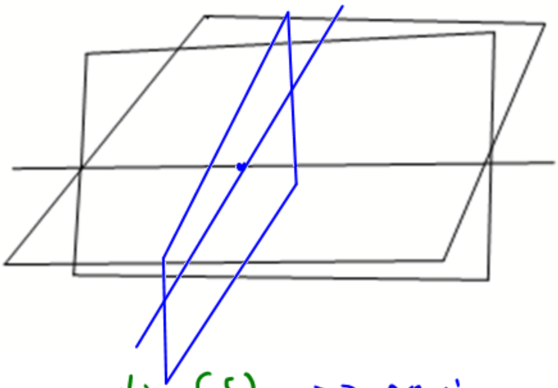


rovnob.

$\emptyset$ → nie pre HOM.

= tá istá rovina





Pridám rovnicu (rovina) $\rightarrow$ klesne dim(S) $\rightarrow$ rovina priamka bod

↳ zvýšim $h(A)$

$$\boxed{d(S) = n - h(A)}$$

Veta 5.7.11. *Každý podpriestor priestoru F^n je množinou riešení nejakého homogénneho systému lineárnych rovníc.*

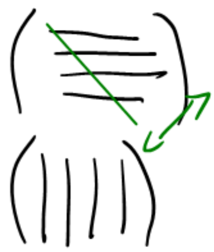
↳ nerobíme; (neskúšam)

↳ treba vedieť náčrt

5.7.3 Frobeniova veta

Veta 5.7.14. *Pre každú maticu A nad poľom F platí $h(A) = h(A^T)$.*

A^T



D: $A \in M_{m,n}(F)$

sústava $A\vec{x}^T = \vec{0}^T$

$h(A)$ vs. $h(A^T)$ = dim. podpr. určené riadkami A^T = stĺpce A

OLN: $\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n$ stĺpce A

$$A = \begin{pmatrix} \vec{s}_1^T & \vec{s}_2^T & \dots & \vec{s}_n^T \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x}^T = \begin{pmatrix} \vec{s}_1^T & \vec{s}_2^T & \dots & \vec{s}_n^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ n.D.Ú. premyslieť

$$x_1\vec{s}_1^T + x_2\vec{s}_2^T + \dots + x_n\vec{s}_n^T = \vec{0}^T \quad /^T$$

(*) $\boxed{x_1 \vec{s_1} + x_2 \vec{s_2} + \dots + x_n \vec{s_n} = \vec{o}}$

$\Updownarrow$

$(x_1, \dots, x_n)$ je riešenie danej sústavy

$h(A) = r$:

$$\vec{\gamma}_{r+1} = (-c_{1,r+1}, -c_{2,r+1}, \dots, -c_{r,r+1}, 1, 0, \dots, 0),$$
$$\vec{\gamma}_{r+2} = (-c_{1,r+2}, -c_{2,r+2}, \dots, -c_{r,r+2}, 0, 1, \dots, 0),$$
$$\dots$$
$$\vec{\gamma}_{n} = (-c_{1,n}, -c_{2,n}, \dots, -c_{r,n}, 0, \dots, 0, 1).$$

$\longrightarrow$ riešenia sústavy

(*) $-c_{1,r+1}\vec{s_1} - c_{2,r+1}\vec{s_2} - \dots - c_{r,r+1}\vec{s_r} + \vec{s_{r+1}} \Rightarrow \vec{s_{r+1}} = LK(\vec{s_1}, \dots, \vec{s_r})$

$\Rightarrow \vec{s_{r+2}} =$ —||—

$\Rightarrow \vec{s_n} =$ —||—

LK

$[\vec{s_1}, \dots, \vec{s_r}, \vec{s_{r+1}}, \dots, \vec{s_n}] \subseteq [\vec{s_1}, \dots, \vec{s_r}]$

$h(A^T) = d($ — || — $) \leq r = h(A)$

pre ľub. A: $\boxed{h(A^T) \leq h(A)}$

Pre A^T: $(A^T)^T = A$: $h(A) \leq h(A^T)$

$\Big\}\ h(A) = h(A^T)$ □

Riešiteľnosť: HOM: $\left(\ \dots \ \middle|\ \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right)$ $(0, 0, 0, \dots, 0)$

$\left(\begin{matrix}0 & 0 & 0 & 0\end{matrix}\ \middle|\ 1\right) \to$ nemá riešenie

$\left(\begin{matrix}\boxed{1} & 0 & * & * \\ 0 & \boxed{1} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}* \\ * \\ \boxed{\ }\end{matrix}\right)$ $\left(\begin{matrix}\boxed{1} & & * & * \\ & \boxed{1} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} \\ \\ 1\end{matrix}\right)$ $\begin{matrix}0 & 0 & 0 & 0\end{matrix}\ \big|\ 0$

$\hookrightarrow$ nemá rieš. $\hookrightarrow$ má rieš.

Veta 5.7.16 (Frobeniova). *Nehomogénna sústava lineárnych rovníc (5.2) je riešiteľná práve vtedy, keď matica sústavy a rozšírená matica sústavy majú rovnakú hodnosť, t.j.*

$$h(A) = h(A').$$

Veta 5.7.16 (Frobeniova). *Nehomogénna sústava lineárnych rovníc (5.2) je riešiteľná práve vtedy, keď matica sústavy a rozšírená matica sústavy majú rovnakú hodnosť, t.j.*

$$h(A) = h(A').$$

D: $A \cdot \vec{x}^T = \vec{b}^T$ OZN: $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ stĺpce A

$$(\vec{\alpha}_1^T \, \vec{\alpha}_2^T \dots \vec{\alpha}_n^T)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{b}^T \qquad (S)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 \vec{\alpha}_1 + x_2 \vec{\alpha}_2 + \dots + x_n \vec{\alpha}_n = \vec{b} \qquad (*)$$

$\boxed{\Rightarrow}$ $(x_1, \dots, x_n)$ je riešenie (*)

$$\vec{b} \in [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n]$$

$$[\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n] = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{b}]$$

$$d(\text{—}\,\|\,\text{—}) = d(\text{—}\,\|\,\text{—})$$

$$h(A^T) = h(A'^T)$$

$$h(A) = h(A')$$

$\boxed{\Leftarrow}$ „zdola nahor" $\uparrow$

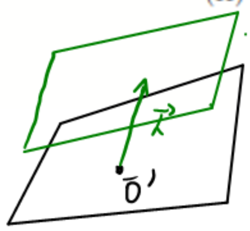
Veta 5.7.17. *Nech $\vec{\alpha}$ je riešenie sústavy lineárnych rovníc*

$$A.\vec{\alpha}^T = \vec{\gamma}^T \qquad \text{(N)}$$

a S je podpriestor pozostávajúci zo všetkých riešení homogénneho systému

$$A.\vec{\alpha}^T = \vec{0}^T. \qquad \text{(H)}$$

Potom $T = \{\vec{\alpha} + \vec{\beta}; \vec{\beta} \in S\}$ je množina všetkých riešení (N).



D: $T = \{\vec{\alpha} + \vec{\beta}; \vec{\beta} \in S\}$

R = mn. riešení (N)

$\boxed{T \subseteq R}$ $A(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^T = A(\vec{\alpha}^T + \vec{\beta}^T) = A \cdot \vec{\alpha}^T + \underbrace{A \cdot \vec{\beta}^T}_{= \vec{0}^T}$

$$= A\vec{\alpha}^T = \vec{\gamma}^T$$

$\boxed{R \subseteq T}$ Nech $\vec{\alpha}_1$ je riešenie (N) : $A\vec{\alpha}_1^T = \vec{\gamma}^T$

$$\vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha} + \vec{\beta} \quad \leftarrow \quad \vec{\beta} = \vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha} \in S$$

$$A\vec{\beta}^T = A(\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha})^T = A(\vec{\alpha}_1^T - \vec{\alpha}^T) =$$

$$= \underbrace{A\vec{\alpha}_1^T}_{\vec{\gamma}^T} - \underbrace{A\vec{\alpha}^T}_{\vec{\gamma}^T} = \vec{\gamma}^T - \vec{\gamma}^T = \vec{0}^T$$

$\square$

5.8 Jadro a obraz lineárneho zobrazenia

Definícia 5.8.1. Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f : V \to W$ je lineárne zobrazenie. Potom *jadrom lineárneho zobrazenia* f nazývame množinu

$$\operatorname{Ker} f = \{\vec{\alpha} \in V; f(\vec{\alpha}) = \vec{0}\}$$

a *obrazom lineárneho zobrazenia* f nazývame množinu

$$\operatorname{Im} f = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in V\}.$$

Tvrdenie 5.8.2. *Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f : V \to W$ je lineárne zobrazenie. Potom* $\operatorname{Ker} f$ *je vektorový podpriestor priestoru V a* $\operatorname{Im} f$ *je vektorový podpriestor priestoru W.*

Tvrdenie 5.8.3. *Nech $f : V \to W$ je lineárne zobrazenie a $V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$. Potom* $\operatorname{Im} f = [f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)]$.

Tvrdenie 5.8.4. *Nech V s W sú vektorové priestory nad poľom F a $f : V \to W$ je lineárne zobrazenie.*

Zobrazenie f je injektívne práve vtedy, keď $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$.

Tvrdenie 5.8.5. *Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f : V \to W$ je lineárne zobrazenie.*

Zobrazenie f je surjektívne práve vtedy, keď $\operatorname{Im} f = W$.

Dôsledok 5.8.6. *Lineárne zobrazenie $f : V \to W$ je izomorfizmus práve vtedy, keď* $\operatorname{Im} f = W$ *a* $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$.

D. V.
nasledovať

Veta 5.8.7. *Nech V a W sú konečnorozmerné vektorové priestory a $f : V \to W$ je lineárne zobrazenie. Potom*

$$d(V) = d(\operatorname{Ker} f) + d(\operatorname{Im} f).$$

neskúšam dôkaz