SKÚŠKA

samoštúdium:

* SÚČTY PODPRIESTOROV
* JADRO A OBRAZ – len „ľahké" dôkazy

  $d(\ker f) + d(\mathrm{Im}\, f) = d(V)$: bez D
* DETERMINANTY

  len tie dôkazy, čo budú na prednáške

  CHCEM aby ste vedeli VLASTNOSTI + POČÍTAŤ determinant

Hodnotenie: 40/60

100-90 A

89.5-80 B

79.5-70 C

69.5-60 D

59.5-50 E

DETERMINANTY

MINULE: geometricky = plocha, objem (+ ZNAMIENKO)

zovšeobecnenie na viac rozmerov

$n \times n$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \underline{a_{11}a_{23}a_{32}} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad i(\varphi) = 1$

Definícia 6.2.3. Nech A je matica typu $n \times n$ nad poľom F, $A = ||a_{ij}||$. *Determinant matice* A je

$$|A| = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \ldots a_{n\varphi(n)}. \tag{6.1}$$

Symbolom $\sum\limits_{\varphi \in S_n}$ rozumieme, že sčitujeme cez celú množinu S_n, teda pre každú permutáciu $\varphi \in S_n$ pripočítame jeden sčítanec uvedeného tvaru. (Množina S_n je konečná, teda takýto súčet je jednoznačne definovaný.)

$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \ldots & \varphi(n) \end{pmatrix}$

$$|A| = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \ldots a_{n\varphi(n)}.$$

→ $n!$ sčítancov

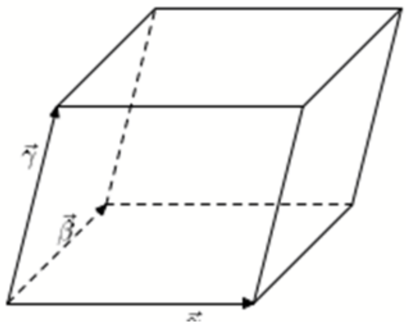
→ každý súčin obsahuje práve 1 prvok z každého riadku

— || — — || — — || — stĺpca

$4! = 24$

$5! = 120$

? AKO rátať determinant EFEKTÍVNEJŠIE ?



VÝPOČET determinantu:

- Laplaceov rozvoj
- ERO/ESO

Veta 6.2.6. *Nech A je matica typu $n \times n$. Potom*

$$|A| = |A^T|.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

D: preskočím.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D: z def.

↳ normálne násobenie

↳ znamienka (inverzie)

$$\boxed{i(\varphi) = i(\varphi^{-1})}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4×4

$$|A| = \pm a_{11} a_{23} a_{34} a_{42}$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & & a_{23} & \\ & & & a_{34} \\ & a_{42} & & \end{vmatrix}$$

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

VÝPOČET DETERMINANTU CEZ ERO (ESO)

* D niekl. preskočí
* Tie čo pojem → bez Laplaceovho rozvoja

$$|A| \overset{?}{=} ⓘ \quad \dots \quad \overset{?}{=} ② \begin{vmatrix} 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

ESO = ERO na A^T

Veta 6.3.5. *Ak maticu B získame z A vynásobením k-teho riadku skalárom $c \in F$, tak*

$$|B| = c|A|.$$

D:

$$|A| = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{n\varphi(n)}.$$

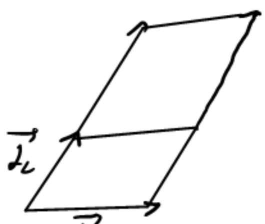
i-ty r. vynásobím c:

$$|B| = \sum_{\varphi} (-1)^{i(\varphi)} a_{1,\varphi(1)} a_{2,\varphi(2)} \dots c\, a_{i,\varphi(i)} \dots a_{n,\varphi(n)}$$

$$= c \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{n\varphi(n)}. = c|A| \quad \square$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & & a_{23} & \\ c a_{31} & & & c a_{34} \\ & a_{42} & & \end{vmatrix}$$

GEOM:



$S = r \cdot (v)$

Σ c-krát

$V = S_1 \cdot (v)$

DÔS: Ak A má nulový riadok $\Rightarrow |A| = 0$.

D: $\begin{pmatrix} \uparrow\uparrow \\ c=0 \end{pmatrix}$

Veta 6.3.10. *Ak matica B vznikne z A vzájomnou výmenou dvoch riadkov, tak $|B| = -|A|$. (Výmena 2 riadkov matice mení znamienko determinantu.)*

glan. $\rightarrow$? znamienko ?

D: A a_{ij}

$B \rightarrow$ v A vymením s-tý a r-tý riadok

$b_{sj} = a_{rj}$, $a_{rj} = b_{sj}$ + ostatné rovnaké

$$|B| = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} b_{1,\varphi(1)} \dots b_{s,\varphi(s)} \dots b_{r,\varphi(r)} \dots b_{n,\varphi(n)}$$

$$= \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{1,\varphi(1)} \dots a_{r,\varphi(s)} \dots a_{s,\varphi(r)} \dots a_{n,\varphi(n)}$$

$$= \sum_{\varphi} (-1)^{i(\varphi)} a_{1,\varphi(1)} \quad a_{\boxed{s,\varphi(r)}} \quad a_{\boxed{r,\varphi(s)}} \dots a_{n,\varphi(n)}$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & s & r & n \\ \varphi(1) & \varphi(s) & \varphi(r) & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

$$\varphi' = \begin{pmatrix} 1 & s & r & n \\ \varphi(1) & \varphi(r) & \varphi(s) & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

* $\varphi \mapsto \varphi'$ bij. $S_n \rightarrow S_n$ N.D.Ú.
* ? $i(\varphi)$? vs. $i(\varphi')$?

? $(-1)^{i(\varphi)} = -(-1)^{i(\varphi')}$?

$$= \sum_{\varphi' \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{1,\varphi'(1)} \dots a_{s,\varphi'(s)} \quad a_{r,\varphi'(r)} \dots a_{n,\varphi'(n)}$$

? ✓

$$= -\sum_{\varphi' \in S_n} (-1)^{i(\varphi')} a_{1,\varphi'(1)} \dots a_{s,\varphi'(s)} \quad a_{r,\varphi'(r)} \dots a_{n,\varphi'(n)}$$

$$= -|A|$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & & s & k & l & & n \\ \varphi(1) & & \varphi(s) & \varphi(k) & \varphi(l) & & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

$$\varphi' = \begin{pmatrix} 1 & & s & k & l & & n \\ \varphi(1) & & \varphi(l) & \varphi(k) & \varphi(s) & & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

kde pribudli odbudli inverzie: ~~pred~~ s, ~~za~~ l

bola inverzia → zmizla -1

nebola → pribudla $+1$

medzi $\varphi(s), \varphi(k)$

(s,k) $s<k<l$ ± 1

(l,k) $s<k<l$ ± 1

$2(l-s+1)$ zmien o ± 1

ešte s, l

$\varphi(s)$ $\varphi(l)$

$\varphi(l)$ $\varphi(s)$ zmena o ± 1

NEPÁRNY počet zmien o ± 1

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$i(\varphi)$ a $i(\varphi')$ majú rôznu paritu □

Veta 6.3.8. *Nech matice A a B sú matice typu $n \times n$, ktoré sa líšia len v k-tom riadku. Potom $|A| + |B| = |C|$, kde $c_{ij} = a_{ij} = b_{ij}$ pre $i \neq k$ a $\boxed{c_{kj} = a_{kj} + b_{kj}}$.*

D:

$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $\quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $\quad C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$|C| = |A| + |B|$

$$|A| = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{n\varphi(n)}.$$

$$|C| = \sum (-1)^{i(\varphi)} c_{1,\varphi(1)} \cdots \underbrace{(a_{k,\varphi(k)} + b_{k,\varphi(k)})}_{c_{k,\varphi(k)}} \cdots c_{n,\varphi(n)}$$

$$= \sum (-1)^{i(\varphi)} c_{1,\varphi(1)} \cdots a_{k,\varphi(k)} \cdots c_{n,\varphi(n)}$$

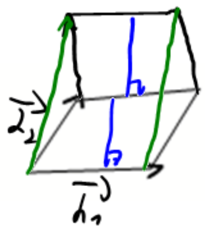
$$+ \sum (-1)^{i(\varphi)} c_{1,\varphi(1)} \cdots b_{k,\varphi(k)} \cdots c_{n,\varphi(n)}$$

$= \sum (-1)^{i(\varphi)} a_{1,\varphi(1)} \dots a_{k,\varphi(k)} \dots a_{n,\varphi(n)}$

$+ \sum (-1)^{i(\varphi)} b_{1,\varphi(1)} \dots b_{k,\varphi(k)} \dots b_{n,\varphi(n)}$

$= |A| + |B|$ $\square$

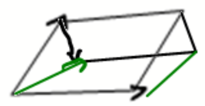
$A = \begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \vec{a_2} \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \vec{b_2} \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \vec{a_2} + \vec{b_2} \end{vmatrix}$



základňa – rovnaká
výšky = súčet

$S = a(v_1 + v_2) = S_1 + S_2$

ZNAMIENKO:



← rozdiel

Veta 6.3.9. *Ak matica B vznikne z A pripočítaním c-násobku niektorého riadku k inému (pričom $c \in F$), tak $|B| = |A|$.*

→ N.D.Ú, geometria

$$\begin{vmatrix} \vec{a_1} + c\vec{a_2} \\ \vec{a_2} \\ \vdots \\ \vec{a_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \vec{a_2} \\ \vdots \\ \vec{a_n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c\vec{a_2} \\ \vec{a_2} \\ \vdots \\ \vec{a_n} \end{vmatrix}$$

$$= -\|- + c \underbrace{\begin{vmatrix} \vec{a_2} \\ \vec{a_2} \\ \vdots \\ \vec{a_n} \end{vmatrix}}_{0} = |A|$$

0 ← 2 rovnaké r. (BUDE)

Veta 6.3.7. *Ak má matica A dva rovnaké riadky, tak $|A| = 0$.*

D: $|A| = \begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \vec{a_i} \\ \vec{a_i} \\ \vec{a_n} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \vec{a_i} \\ \vec{a_i} \\ \vec{a_n} \end{vmatrix} = -|A|$

$|A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0$

prejde $F = \mathbb{R}, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_7 \dots$
NIE $F = \mathbb{Z}_2$

Poriadny D: – rozpísať (pomocou Laplaceovho rozvoja)

VIEME: Ako ERO zmenia det.

$$|A| = -|A_1| = -c_1|A_2| = \dots = \pm c_1 \dots c_k |\triangle|$$

Veta 6.3.11. *Ak A je horná trojuholníková matica (pod hlavnou diagonálou má nuly), tak determinant matice A sa rovná súčinu prvkov na diagonále.*

$$|A| = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Dôsledok 6.3.12. *Determinant diagonálnej matice sa rovná súčinu diagonálnych prvkov.*

$$\begin{vmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \dots d_n$$

$$\sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \dots a_{n\varphi(n)}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

+ ostatné obsahujú nulu

idea D

6.3.1 Laplaceov rozvoj

→ pravidlo samostatne

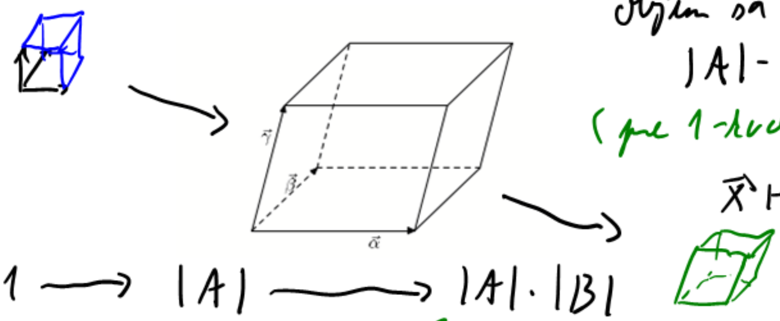
6.4 Determinant súčinu matíc

Veta 6.4.1. *Nech A, B sú dve matice typu $n \times n$ nad poľom F. Potom platí*

$$\boxed{|AB| = |A| \cdot |B|.}$$

↳ bez D

GEOM: $\vec{x} \longmapsto \vec{x}A$



objem sa zväčší $|A|$-krát

(pre 1-kocku + pre ľubovoľnú)

$\vec{x} \longmapsto \vec{x}B$

$$1 \longrightarrow |A| \longrightarrow |A| \cdot |B|$$

+ znamienko

Koľkokrát sa zväčší objem pri zložení zobrazení.