Podgrupy a homomorfizmy

Úloha 1. Budeme pracovať v grupe $(\mathbb{R}, +)$.
a) Dokážte, že $[\{2,3\}] = \mathbb{Z}$;
b) Dokážte, že $[\{1, \sqrt{2}\}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Z}\}$.
c*) Je možné podgrupu $[\{1, \sqrt{2}\}]$ generovať jediným prvkom? (V terminológii, ktorú na prednáške ešte len zavedieme sa dá táto otázka sformulovať takto: Je podgrupa $[\{1, \sqrt{2}\}]$ cyklická?)

Úloha 2. Ukážte, že $H = \{\frac{m}{n}; m, n$ sú nepárne$\}$ je podgrupa grupy $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Úloha 3. Tvorí daná podmnožina podgrupu danej grupy:
a) $\mathbb{N}$ v $(\mathbb{Z}, +)$;
b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ v $(\mathbb{R}^2, +)$;
c) $\{z \in \mathbb{C}; z^5 = 1\}$ v $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$;
d) $\{id, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)\}$ v $(S_3, \circ)$;
e) $\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right); a, b \in \mathbb{R}, (a,b) \neq (0,0)\}$ v grupe všetkých regulárnych matíc 2×2 s operáciou násobenia matíc.

Úloha 4. Ak A, B, C sú podgrupy G a $C \subseteq A \cup B$, tak $C \subseteq A$ alebo $C \subseteq B$.

Úloha 5. Nájdite príklad nekonečnej grupy, ktorá obsahuje netriviálnu konečnú podgrupu. (Pod netriviálnou podgrupou tu rozumieme podgrupu, ktorá má viac ako jeden prvok.)

Úloha 6. Nájdite všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (súčin dvoch grúp sme definovali na minulom cvičení) a všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_4$ (v oboch prípadoch operácia $\oplus$). Majú tieto grupy rovnaký počet dvojprvkových podgrúp? Dá as to nejako použiť na zdôvodnenie, že tieto dve grupy nie sú izomorfné?

Úloha 7. Nech V je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$. Je aj každá podgrupa grupy $(V, +)$ podpriestorom priestoru V? Ako je to s vektorovými priestormi nad poľom $\mathbb{Z}_p$?

Úloha 8. Nech H je podgrupa grupy G. Nech $g \in G$. Ukážte, že $gHg^{-1} = \{ghg^{-1}; h \in H\}$ je podgrupa grupy G.

Úloha 9. Ukážte, že ak G je grupa a $a \in G$, tak zobrazenie $f_a \colon G \to G$ definované ako $f_a(x) = axa^{-1}$ je izomorfizmus.

Úloha 10. Dokážte, že $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ s operáciou $*$ definovanou ako $(a,b) * (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$ tvorí grupu. (Hint: Dalo by sa nájsť jednoduché riešenie s pomocou niektorej grupy z úlohy 2 alebo pomocou inej známej grupy?)